

SISTEM PERSAMAAN LINIER

2

MENCARI PENYELESAIAN SPL

- Grafik
- Substitusi
- Eliminasi
- Metode Gauss
- Metode Gauss-Jordan

REVIEW ELIMINASI GAUSS

- Merubah sistem persamaan linier menjadi bentuk matriks

$$[A][X] = [C]$$

- Terdiri dari dua tahap
 - Forward Elimination of Unknowns (Membentuk Eselon Baris)
 - Back Substitution

SPL → Matriks

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

Jika dirubah bentuknya menjadi matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

BENTUK ESELON BARIS

- Jika sebuah baris tidak terdiri seluruhnya dari angka nol, maka bilangan **tak nol pertama** adalah 1 (dinamai **1 utama**)
- Jika ada suatu baris yang **terdiri seluruhnya dari 0**, maka baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama **di bawah** matriks
- Di dalam sebarang dua baris yang berurutan yang tidak terdiri seluruhnya dari 0, maka **1 utama pada baris yang lebih rendah, letaknya lebih jauh ke kanan dari pada 1 utama pada baris yang lebih tinggi.**

DENGAN OBE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$O_{21(-1)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$O_{2(-1/3)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

BACK SUBSTITUTION

- $x_1 + 2x_2 = 4$
- $x_2 = 2/3$

$$x_1 + 4/3 = 4$$

$$x_1 = 12/3 - 4/3$$

$$x_1 = 8/3$$

Jadi solusi SLP tersebut : $\{(8/3, 2/3)\}$

SOAL

- $x_1 + 4x_2 + x_3 = 18$
- $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 22$
- $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$

VARIABEL BEBAS DAN TAK BEBAS

- Dalam bentuk eselon baris
 - Variabel tak bebas: variabel yang berkaitan dengan elemen utama
 - Variabel bebas: variabel lainnya

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4$$

$$x_2 + 3x_3 = 3$$

- x_1 dan x_2 : variabel tak bebas (elemen utama)
- x_3 : variabel bebas
- Maka Penyelesaian dari SPL dengan matriks tersebut adalah:

$$x_2 = -3t + 3$$

$$x_1 = 4t - 5$$

$$x_3 = t$$

SOAL

- Diketahui bentuk eselon baris:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tentukan solusi dari SPL yang berkaitan dengan matriks tersebut!

KEMUNGKINAN SOLUSI SPL

- Memiliki jawaban tunggal
- Memiliki banyak jawaban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tidak memiliki jawaban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

SOAL

- Diketahui bentuk eselon dari sebuah SPL:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 + a^2 & 2 + a \end{bmatrix}$$

- Tentukan nilai a agar SPL tersebut:
 - Memiliki jawaban tunggal
 - Mempunyai banyak jawaban
 - Tidak mempunyai jawaban

- Memiliki jawaban tunggal jika

$$a^2 - 4 \neq 0$$

- Memiliki banyak jawaban jika

$$a^2 - 4 = 0 \text{ dan } a + 2 = 0$$

- Tidak memiliki jawaban jika

$$a^2 - 4 = 0 \text{ dan } a + 2 \neq 0$$

ELIMINASI GAUSS-JORDAN

- Proses lanjutan dari eliminasi gauss
- Menggunakan bentuk matriks eselon baris yang direduksi

ESELON BARIS TEREDUKSI

- Ciri bentuk Eselon Baris
- PLUS
- Setiap kolom yang mengandung 1 utama, memiliki nilai 0 di tempat lain

CONTOH

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$O_{21(-1)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$O_{2(-1/3)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$O_{12(-2)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

HASIL

- Didapat Hasil:
 - $x_1 = 8/3$
 - $x_2 = 2/3$

PERSAMAAN LINIER HOMOGEN

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$

-

- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

- Yaitu persamaan yang semua koefisien $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n = 0$

SOLUSI DARI SPL HOMOGEN

- Solusi trivial
 - Solusi trivial yaitu solusi di mana semua nilai variabel dalam SPL bernilai 0
 - $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, X_n = 0$
- Solusi banyak
 - Terjadi jika ($n > m$)

CONTOH SOAL

- Diketahui:

$$(a - 3)x + y = 0$$

$$x + (a - 3)y = 0$$

- Tentukan nilai a , agar SPL homogen tersebut memiliki pemecahan tak trivial

JAWABAN

- Memiliki pemecahan tak trivial jika determinannya = 0
- $(a - 3)^2 - 1 = 0$
 $(a - 3) = \pm 1$
 $a = 4$ atau $a = 2$