MATEMATIKA TEKNIK 1

3 SKS

TEKNIK ELEKTRO

UDINUS

BAB I
BILANGAN KOMPLEKS

Dengan memiliki sistem bilangan real $\mathbb{R}$ saja kita tidak dapat menyelesaikan persamaan $x^2+1=0$. Jadi disamping bilangan real kita perlu bilangan jenis baru. Bilangan jenis baru ini dinamakan bilangan *imajiner* atau bilangan *kompleks*.

BILANGAN KOMPLEKS DAN OPERASINYA

Definisi 1

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk:

a + bi atau **a + ib**, a dan b bilangan real dan $i^2 = -1$.

Notasi

Bilangan kompleks dinyatakan dengan huruf z, sedang huruf x dan y menyatakan bilangan real. Jika $z = x + iy$ menyatakan sembarang bilangan kompleks, maka x dinamakan bagian real dan y bagian imajiner dari z. Bagian real dan bagian imaginer dari bilangan kompleks z biasanya dinyatakan dengan Re(z) dan Im(z).

OPERASI HITUNG PADA BILANGAN KOMPLEKS

DEFINISI 2

Bilangan kompleks $z_1=x_1+iy_1$ dan bilangan kompleks $z_2=x_2+iy_2$ dikatakan sama, $z_1=z_2$, jika dan hanya jika $x_1=x_2$ dan $y_1=y_2$.

DEFINISI 3

Untuk bilangan kompleks $z_1=x_1+iy_1$ dan $z_2=x_2+iy_2$ jumlah dan hasilkali mereka berturut-turut didefinisikan sbb:

$$z_1+z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2+x_2y_1)$$

Himpunan semua bilangan kompleks diberi notasi $\mathbb{C}$

Jadi $\mathbb{C} = \{ z \mid z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$.

Jika Im(z)=0 maka bilangan kompleks z menjadi bilangan real x, sehingga bilangan real adalah keadaan khusus dari bilangan kompleks, sehingga $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Jika Re(z)=0 dan Im(z)≠0, maka z menjadi iy dan dinamakan bilangan *imajiner murni*. Bilangan imajiner murni dengan y=0, yakni bilanga i, dinamakan *satuan imajiner*.

Sifat-sifat lapangan bilangan kompleks

Himpunan semua bilangan kompleks bersama operasi penjumlahan dan perkalian $(\mathbb{C},+,\bullet)$ membentuk sebuah lapangan (*field*). Adapun sifat-sifat lapangan yang berlaku pada bilangan kompleks z_1, z_2 dan z_3 adalah sebagai berikut:

1. $z_1+z_2 \in \mathbb{C}$ dan $z_1 \bullet z_2 \in \mathbb{C}$. (sifat tertutup)
2. $z_1+z_2= z_2+z_1$ dan $z_1 \bullet z_2= z_2 \bullet z_1$ (sifat komutatif)
3. $(z_1+z_2)+z_3= z_1+(z_2+z_3)$ dan $(z_1 \bullet z_2) \bullet z_3= z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3)$ (sifat assosiatif)
4. $z_1 \bullet (z_2+z_3)=(z_1 \bullet z_2)+(z_1 \bullet z_3)$ (sifat distribtif)
5. Ada $0=0+i0 \in \mathbb{C}$, sehingga $z+0=z$ (0 elemen netral penjumlahan)

6. Ada $1=1+i0\in\mathbb{C}$, sehingga $z\bullet 1=z$ (1elemen netral perkalian
7. Untuk setiap $z=x+iy\in\mathbb{C}$, ada $-z=-x-iy$)

   sehingga $z+(-z)=0$
8. Untuk setiap $z=x+iy\in\mathbb{C}$, ada z^{-1}=sehingga $z\bullet z^{-1}=1$.

Tugas: Buktikan sifat-sifat 1 – 8 menggunakan definsi yang telah diberikan.

Contoh soal:

1. Jika $z_1=x_1+iy_1$ dan $z_2=x_2+iy_2$,

   buktikan bahwa: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2)+i(y_1 - y_2)$

2. Diketahui: $z_1=2+3i$ dan $z_2=5-i$.

   tentukan $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, z_1z_2, dan $\dfrac{z_1}{z_2}$

Kompleks Sekawan

Jika $z = x + iy$ bilangan kompleks, maka bilangan kompleks sekawan dari z ditulis $\bar{z}$, didefinisikan sebagai $= (x,-y) = x - iy$.

Contoh:

sekawan dari $3 + 2i$ adalah $3 - 2i$, dan sekawan dari $5i$ adalah $-5i$.

Operasi aljabar bilangan kompleks sekawan di dalam himpunan bilangan kompleks memenuhi sifat-sifat berikut :

Teorema 1 :

a. Jika z bilangan kompleks, maka :

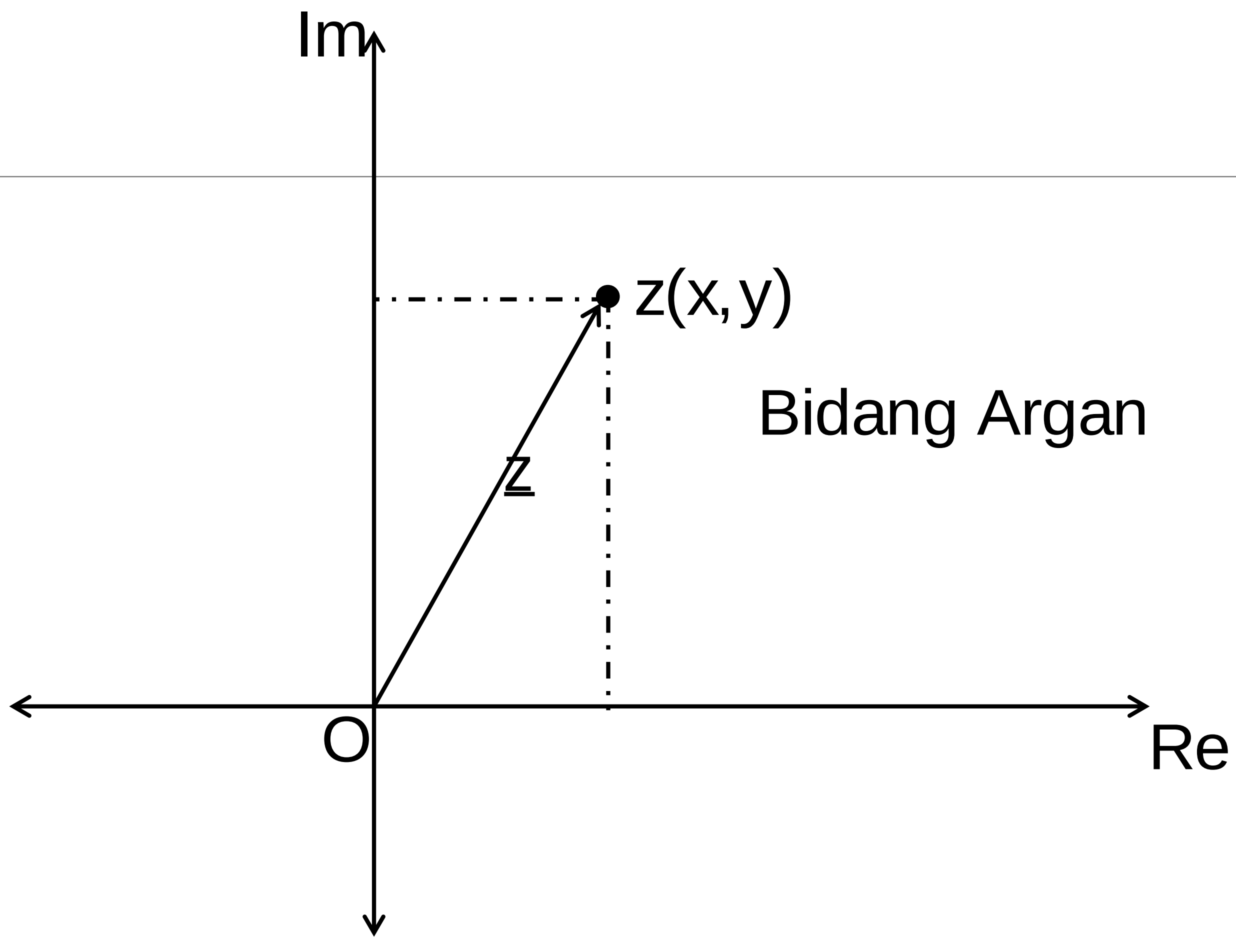
1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$
4. $z \cdot \overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

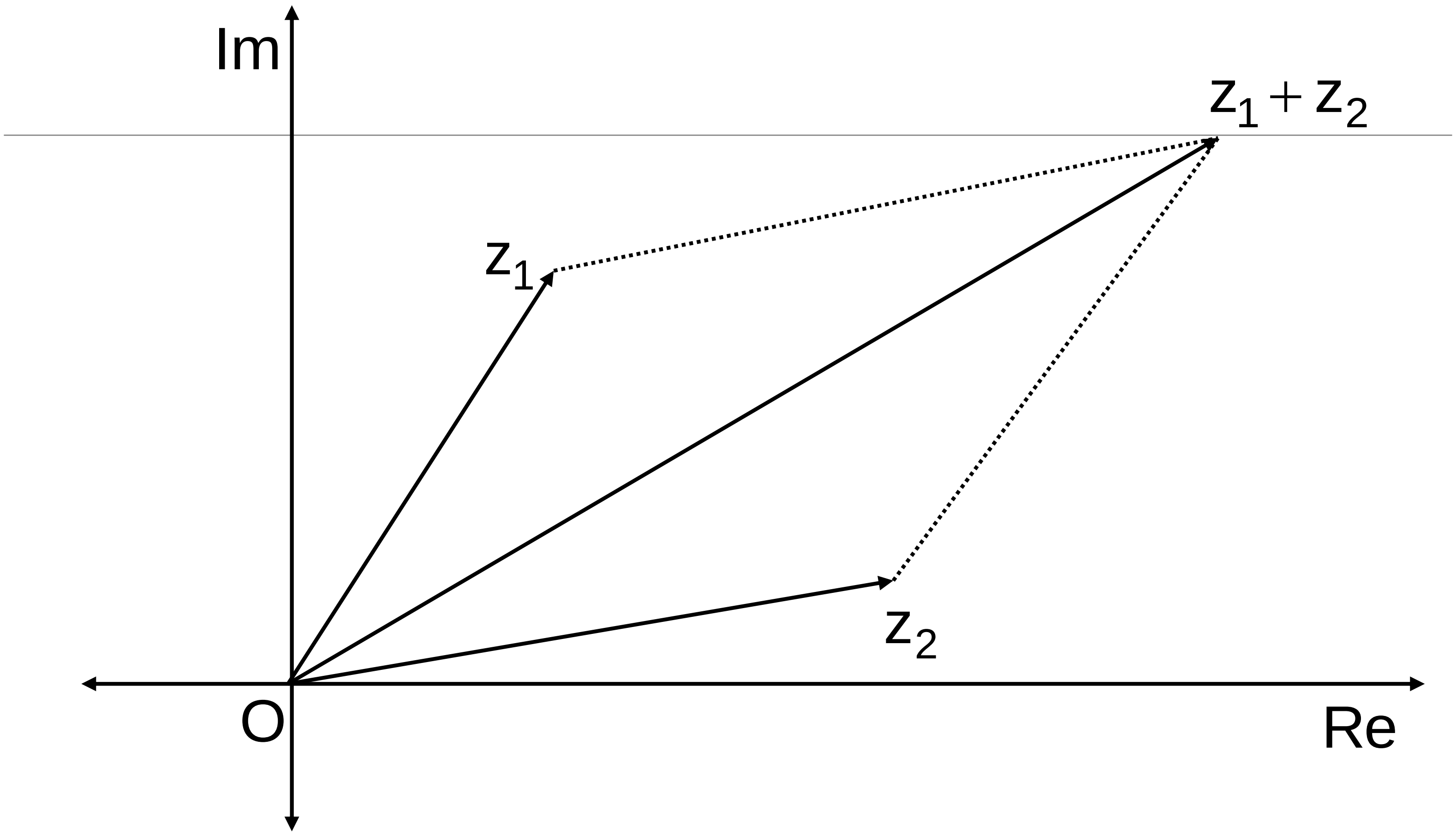
b. Jika z_1, z_2 bilangan kompleks , maka :

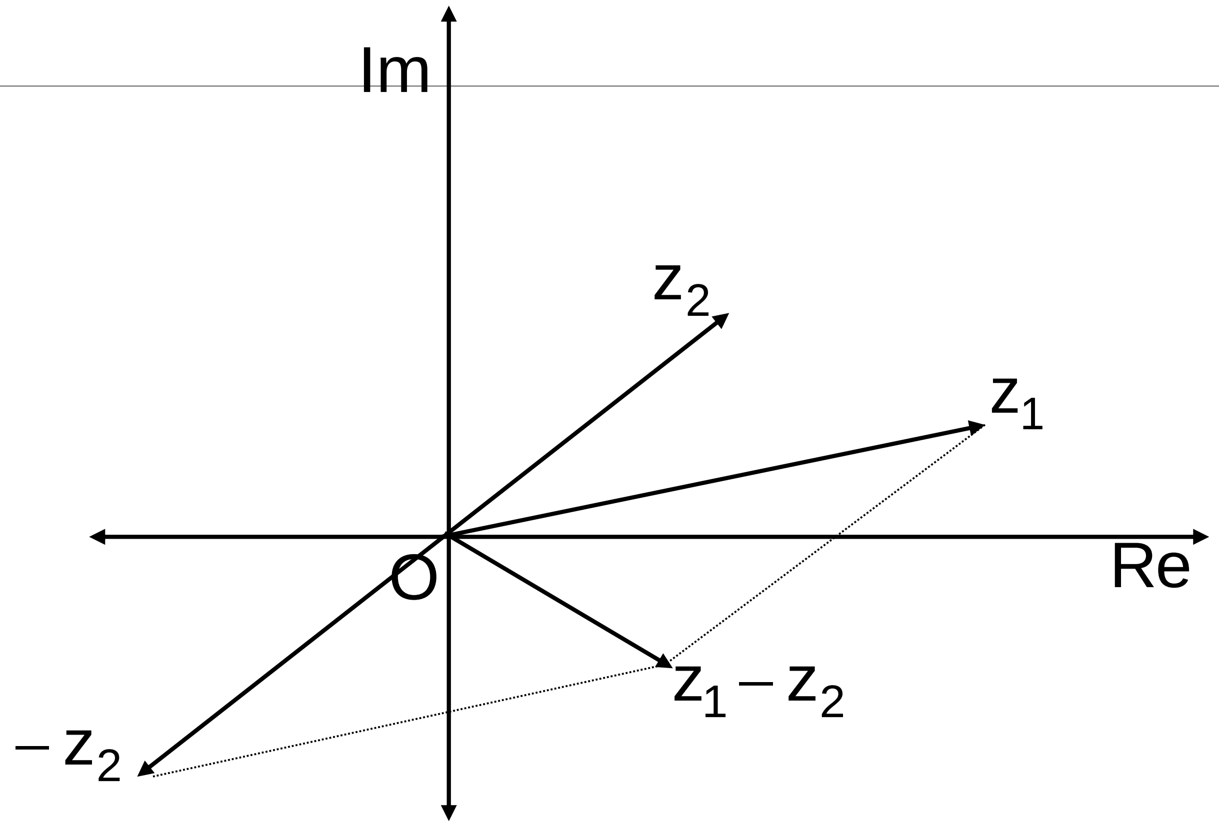
1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, dengan $z_2 \neq 0$.

Interpretasi Geometris Bilangan Kompleks

Karena $z = x + iy$ dapat dinyatakan sebagai $z= (x,y)$, merupakan pasangan terurut bilangan real, maka z dapat digambarkan secara geometri dalam koordinat Kartesius sebagai sebuah titik (x,y). Pemberian nama untuk sumbu x diubah menjadi sumbu Real dan sumbu y diubah menjadi sumbu Imajiner. Bidang kompleks tersebut di beri nama bidang Argand atau bidang z. Jika kita hubungkan titik asal (0,0) dengan titik (x,y), maka terbentuk vektor; sehingga bilangan kompleks $z = x+iy = (x,y)$ dapat dipandang sebagai vektor z. Arti geometris dari penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks dapat dilihat pada gambar berikut.


Im
z(x, y)
Bidang Argan
z
O
Re


Im
$z_1 + z_2$
z_1
z_2
O
Re


Im
z_2
z_1
O
Re
$z_1 - z_2$
$-z_2$

Tugas :

Diketahui $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 5 - i$. Gambarkan pada bidang kompleks (bidang argand), z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$,

$$\overline{z_1},\ \overline{z_2},\ \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

Modulus (Nilai Mutlak) dari Bilangan Kompleks

Definisi 4 :

Jika z = x+iy = (x,y) bilangan kompleks, maka modulus dari z, ditulis $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Arti geometri dari modulus z adalah merupakan jarak dari titik O(0,0) ke z = (x,y). Akibatnya, jarak antara dua bilangan kompleks $z_1 = x_1+iy_1$ dan $z_2 = x_2+iy_2$ adalah

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Selanjutnya apabila $z_1 = x_1 + iy_1$ dan r real positif,

maka $|z - z_1| = r$ merupakan lingkaran yang berpusat di

titik z_1 dengan jari-jari r.

Bagaimanakah dengan $|z - z_1| < r$ dan $|z - z_1| > r$

Gambarkanlah pada bidang z.

Teorema 2 :

A. Jika z bilangan kompleks, maka berlaku :

1. $|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$
2. $|z| = |\bar{z}|$
3. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
4. $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$
5. $|z| \geq |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$

B. Jika z_1, z_2 bilangan kompleks, maka berlaku :

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
5. $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

Tugas : Buktikanlah teorema A di atas dengan memisalkan z = x+iy, kemudian berdasarkan hasil A, buktikan juga teorema B !

1. Bukti: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$
\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= |(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)| \\
&= |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)| \\
&= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 \cancel{-2x_1x_2y_1y_2} + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \cancel{+2x_1x_2y_1y_2}} \\
&= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)} \\
&= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} \cdot \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} \\
&= |z_1| \cdot |z_2|
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

2. Bukti:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}\right|$$

$$= \left|\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+\cancel{2x_1x_2y_1y_2}+x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2-\cancel{2x_1x_2y_1y_2}}{(x_2^2+y_2^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2+y_1^2)\cdot\cancel{(x_2^2+y_2^2)}}{(x_2^2+y_2^2)\cdot\cancel{(x_2^2+y_2^2)}}}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{terbukti.}$$

3. Bukti: $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$$0 \le (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

$$0 \le x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2$$

$$2x_1 x_2 y_1 y_2 \le x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2$$

$$x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 \le x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2$$

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

$$2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \le 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2 \le$$

$$x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \le \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2$$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

terbukti

4. Bukti:

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2|$$

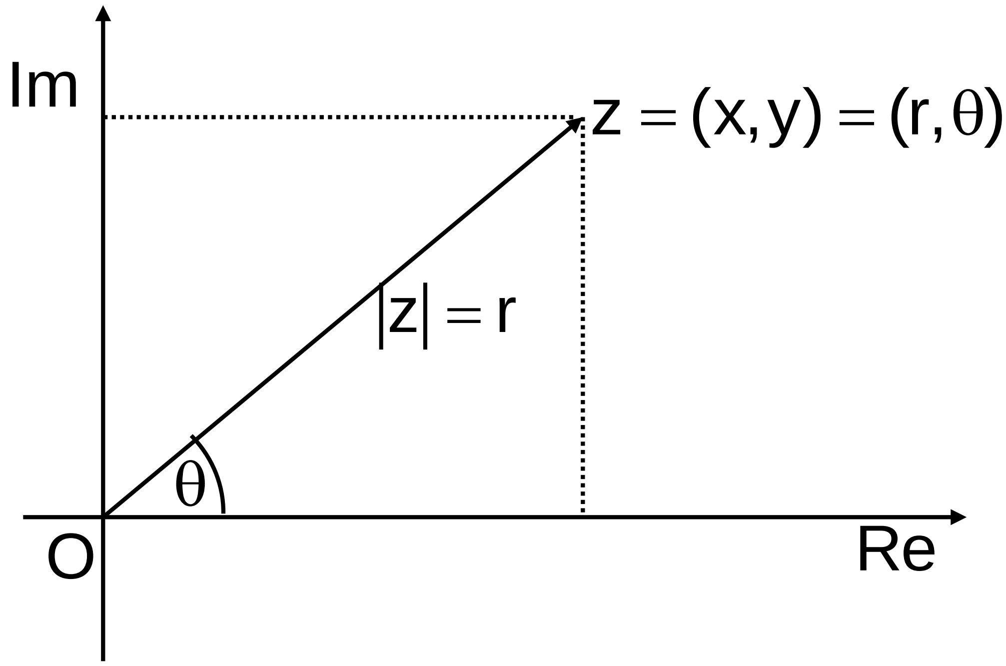
$$\leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

$$\therefore\ |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

Bentuk Kutub (Polar) dan Eksponen dari Bilangan Kompleks

Selain dinyatakan dalam bentuk $z = x+iy = (x,y)$, bilangan kompleks z dapat dinyatakan pula dalam bentuk koordinat kutub atau Polar, yaitu $z = (r,\theta)$.



Adapun hubungan antara keduanya, (x, y) dan (r, θ) adalah :

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

sehingga $\theta = \text{arc tan}\left(\frac{y}{x}\right)$

θ adalah sudut antara sumbu x positif dengan oz

didapat juga $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

Jadi, bentuk kutub bilangan kompleks z adalah

$z = (r, \theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r \text{ cis } \theta$.

dan sekawan dari z adalah = $(r, -\theta) = r(\cos\theta - i\sin\theta)$.

Definisi 5 :

Pada bilangan kompleks $z = (r, \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, sudut θ disebut argument dari z, ditulis arg z. Sudut θ dengan $0 \leq \theta < 2\pi$ atau $-\pi < \theta \leq \pi$ disebut argument utama dari z, ditulis θ = Arg z. Pembatasan untuk sudut θ tersebut dipakai salah satu saja.

Definisi 6 :

Dua bilangan kompleks $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ dikatakan sama, jika $r_1 = r_2$, dan $\theta_1 = \theta_2$.

Selain penulisan bilangan kompleks $z = (x , y) = (r, \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \text{ cis } \theta$, maka anda dapat menuliskan z dalam rumus Euler (eksponen), yaitu $z = re^{i\theta}$, dan sekawannya adalah $re^{-i\theta}$.

Tugas: Buktikan bahwa $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, dengan menggunakan deret MacLaurin untuk $\cos \theta$, $\sin \theta$ dan e^t dengan mengganti $t = i\theta$.

Contoh :

Nyatakan bilangan kompleks $z = 1 + i$ dalam bentuk polar dan eksponen !

Contoh :

Nyatakan bilangan kompleks z = 1 + i dalam bentuk polar dan eksponen !

Jawab :

$z = 1 + i$, $r = \sqrt{2}$, $\tan \theta = 1$, sehingga $\theta = 45^o = \frac{1}{4}\pi$

Jadi $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} \cos \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

Pangkat dan Akar dari Bilangan Kompleks

Perkalian dan Pemangkatan

Telah kita ketahui bahwa bilangan kompleks dalam bentuk kutub adalah $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Jika $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ & $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka kita peroleh hasil perkalian keduanya sebagai berikut :

$$z_1 z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) +$$

$$i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Dari hasil perkalian tersebut diperoleh:

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

Pertanyaan :

Bagaimanakah jika kita perkalikan $z_1 z_2 \ldots z_n$ dan

$z\ z\ z\ z \ldots z = z^n$?

Jika diketahui:

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\vdots$

$z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$, untuk n asli,

maka secara induksi matematika, diperoleh rumus perkalian $z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]$.

Akibatnya jika, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

Khusus untuk r = 1, disebut **Dalil De-Moivre**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n \text{ asli}.$$

Pembagian:

Sedangkan pembagian z_1 dan z_2 adalah sebagai berikut:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

Setelah pembilang dan penyebut dikalikan dengan sekawan penyebut, yaitu $r_2(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$, maka diperoleh :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

Dari rumus di atas diperoleh:

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Akibat lain jika $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$,

maka: $$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

Untuk: $$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$.

Setelah pembilang dan penyebut dikalikan sekawan penyebut, maka didapat :

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)) \qquad \ldots\ldots\ldots 2$$

Dari 1 dan 2 diperoleh:

$$\boxed{z^n = r^n \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$ **Dalil De-Moivre**

berlaku untuk semua n bilangan bulat.

Contoh:

Hitunglah : $\left(\sqrt{3}-i\right)^{-6}$

Jawab :

Misalkan $z=\sqrt{3}-i$, maka

$$r=|z|=\sqrt{3+1}=2$$

$$\tan\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

karena z di kuadran IV, maka dipilih $\theta=-30^o$

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos -30^o+i\sin -30^o\right)$$

jadi $$\left(\sqrt{3}-i\right)^{-6}=2^{-6}\left(\cos -180^o+i\sin -180^o\right)$$

$$=2^{-6}(-1+0)$$

$$=-2^{-6}$$

Akar Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks z adalah akar pangkat n dari bilangan kompleks w, jika $z^n = w$, dan ditulis $z = w^{\frac{1}{n}}$

Jika $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ akar pangkat n dari bilangan kompleks $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka dari $z^n = w$ diperoleh:
$\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, sehingga $\rho^n = r$ dan $n\phi = \theta + 2k\pi$, k bulat.

Akibatnya $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ dan $\phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$

Jadi . . .

Jadi, akar pangkat n dari bilangan kompleks

$w = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ adalah:

$$z = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

k bulat dan n bilangan asli.

Dari persamaan $z^n = w$, ada n buah akar berbeda yang memenuhi persamaan itu.

Untuk mempermudah dipilih k = 0,1,2,3,…,(n-1);

$0 \leq \frac{\theta + 2k\pi}{n} < 2\pi$, sehingga diperoleh $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ sebagai akar ke-n dari z.

Contoh :

Hitunglah $(-81)^{1/4}$

Jawab :

Misalkan $z = (-81)^{1/4}$, berarti harus dicari penyelesaian persamaan $z^4 = -81$.

Tulis $z = \rho(\cos\phi + i \sin\phi)$ dan $-81 = 81(\cos 180^0 + i \sin 180^0)$,

sehingga $\rho^4(\cos 4\phi + i \sin 4\phi) = 81(\cos 180^0 + i \sin 180^0)$,

diperoleh $\rho^4 = 81$, atau $\rho = 3$ dan $\phi = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4}$.

Jadi $z = 3[\cos(\dfrac{\pi + 2k\pi}{4}) + i \sin(\dfrac{\pi + 2k\pi}{4})]$

Keempat akar yang dicari dapat diperoleh dengan mensubstitusi k = 0,1,2,3 ke persamaan terakhir.

Latihan Soal Bab I

1. Buktikan Teorema 1 dengan memisalkan

   $z = (x,y) = x + iy$.

2. Diketahui $z_1 = 6 + 5i$ dan $z_2 = 8 - i$.

   Tentukan $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, dan z_1 / z_2

3. Jika $z = -1-i$, buktikan $z^2 + 2z + 2 = 0$.

4. Cari bilangan kompleks z yang memenuhi

   sifat: a. $z^{-1} = z$ dan b. $\bar{z} = -z$

5. Buktikan untuk setiap z bilangan kompleks

   berlaku : $z_1 . \overline{z_2} + \overline{z_1} . z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1 . \overline{z_2})$

6. Hitung jarak antara $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 5 - i$.

7. Gambarkan pada diagram argand dan sebutkan nama kurva yang terjadi :

a. $|z - 5| = 6$ dan $|z - 5| > 6$

b. $|z + i| = |z - i|$

c. $1 < |z - i| < 3$

8. Nyatakan bilangan kompleks $z = 2 - 2i$ dalam bentuk polar dan eksponen !

9. Hitunglah $(-2+2i)^{15}$

10. Tentukan himpunan penyelesaian dari : $z^3 - i = 0$