INTEGRAL TAK WAJAR

KALKULUS 2

Integral Tak Wajar

Dalam mendefinisikan integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ sebagai limit jumlah Reimann ada dua syarat yang harus dipenuhi, yaitu :

a. Batas pengintegralan berhingga

b. Integran(f(x)) berhingga pada selang [a,b]

Jika paling kurang salah satu syarat diatas tidak dipenuhi maka integral tentu disebut **integral tak wajar**

Jenis-jenis integral tak wajar

a. Integral tak wajar dengan batas pengintegralan tak hingga

b. Integral tak wajar dengan integran tak hingga

a. Integral Tak Wajar , Batas Pengintegralan Tak Hingga

Definisi :

(i) $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

(ii) $$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Jika limit diruas kanan ada dan berhingga, integral tak wajar disebut konvergen, sebaliknya disebut divergen

(iii) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

Jika $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ dan $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ konvergen,maka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergen

Contoh Periksa kekonvergenan ITW

a. $\int_{4}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ b. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^2}$ c. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+5)}$

Jawab :

a. $$\int_{4}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{4}^{b} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{4}^{b}\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-b^2}-e^{-16}\right) = \frac{1}{2}e^{-16}$$

Jadi integral tak wajar konvergen ke $\frac{1}{2}e^{-16}$

b. $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0}\frac{dx}{(2x-1)^2} = \lim_{b\to-\infty}\left(-\frac{1}{2(2x-1)}\Big|_{b}^{0}\right)$$

$$= \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2b-1)}\right) = \frac{1}{2}$$

Jadi integral tak wajar konvergen ke 1/2

c. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+5)} = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\Big|_{a}^{1} + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\Big|_{1}^{b}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\left(\tfrac{a+1}{2}\right)\right) + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\left(\tfrac{b+1}{2}\right) - \tan^{-1}(1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Jadi integral tak wajar konvergen ke $\frac{\pi}{2}$

Soal-soal latihan

Periksa kekonvergenan integral tak wajar berikut

a. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{4x}\,dx$

c. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$

d. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{1/x}\,dx}{x^2}$

e. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$

f. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)}$

g. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{e^{x^2}}$

h. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17}$

b. Integral Tak Wajar dengan Integran Tak Hingga

(i) Integran Tak Hingga di Ujung Selang

Jika kontinu pada [a,b) dan $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Jika kontinu pada (a,b] dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s \to a^+} \int_s^b f(x)dx$$

Jika limit ruas kanan ada, maka Integral tak wajar dikatakan konvergen, sebaliknya dikatakan divergen

(ii) Integran Tak Hingga di Titik Dalam Selang Pengintegralan

Jika f(x) kontinu pada [*a*,*b*], kecuali di *c* dengan *a* < *c* < *b* dan

$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \underbrace{\lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)dx}_{\mathrm{II}}$$

Jika I dan II ada dan berhingga maka integral tak wajar $\int_a^b f(x)dx$ konvergen.

Contoh Periksa kekonvergenan Integral Tak Wajar

$$\int_0^1 \frac{ln\,x}{x}\,dx$$

Jawab :

Karena fungsi $f(x) = \frac{ln\,x}{x}$ tidak kontinu di x=0 dan $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{ln\,x}{x} = -\infty$

maka

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big|_t^1$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2}\left(0 - (\ln t)^2\right) = -(-\infty)^2 = -\infty$$

Integral tak wajar divergen

Contoh Periksa kekonvergenan integral tak wajar

$$\int_0^2 \frac{x}{1-x}\,dx$$

Jawab

Fungsi $f(x)=\frac{x}{1-x}$ diskontinu di x=1 dan $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x} = \infty$

$$\int_0^2 \frac{x}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1-x}\,dx + \int_1^2 \frac{x}{1-x}\,dx$$

$$= \lim_{s\to 1^-}\int_0^s \frac{x}{1-x}\,dx + \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{x}{1-x}\,dx$$

Karena

$$\lim_{s\to 1^-}\int_0^s \frac{x}{1-x}\,dx = \lim_{s\to 1^-}(-x) - \ln|1-x|\Big|_0^s = \lim_{s\to 1^-}(-s-\ln|1-s|) - 0 = \infty$$

maka integral tak wajar $\int_0^2 \frac{x}{1-x}\,dx$ divergen

Integral takwajar bisa juga muncul dalam bentuk gabungan dari dua jenis diatas, yaitu batas pengintegralan takhingga dan integran tak hingga pada batas pengintegralan seperti contoh berikut

Contoh Periksa kekonvergenan integral tak wajar

$$\int_0^\infty \frac{x}{1-x}\,dx$$

Jawab :

Integral diatas merupakan integral tak wajar karena

- batas atas integral tak hingga
- integran tak hingga di x = 1 yang terletak didalam selang pengintegralan

sehingga

$$\int_0^\infty \frac{x}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1-x}\,dx + \int_1^2 \frac{x}{1-x}\,dx + \int_2^\infty \frac{x}{1-x}\,dx$$

$$= \lim_{s\to 1^-}\int_0^s \frac{x}{1-x}\,dx + \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{x}{1-x}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_2^\infty \frac{x}{1-x}\,dx$$

Karena

$$\lim_{s\to 1^-}\int_0^s \frac{x}{1-x}\,dx = \lim_{s\to 1^-}(-x) - \ln|1-x|\Big|_0^s = \lim_{s\to 1^-}\big(-s-\ln|1-s|\big) - 0 = \infty$$

Maka integral tak wajar $\int_0^\infty \frac{x}{1-x}\,dx$ divergen

Soal-soal latihan

Periksa kekonvergenan integral tak wajar berikut

a. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$ b. $\int_{-1}^{1} xe^{x}\,dx$ c. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ d. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e. $\int_{-2}^{0} \frac{x\,dx}{x^2+7x+10}$ f. $\int_{-2}^{1} \frac{x\,dx}{x^2-1}$ g. $\int_{-2}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+1}$ h. $\int_0^3 \frac{dx}{x\ln x}$

Soal-soal latihan

Periksa kekonvergenan integral tak wajar berikut

a. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+1}$ b. $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^x\,dx$ c. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ d. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x\,dx}{x^2+7x+10}$ f. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x\,dx}{x^2-1}$ g. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$ h. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x\ln x}$