INTEGRAL LIPAT

Kalkulus 2

INTEGRAL LIPAT DUA

Integral untuk fungsi satu variable, kita membentuk suatu partisi dari interval [a,b] menjadi interval-interval yang panjangnya Δx_k , k = 1, 2, 3, ….n

Dengan cara yang sama, kita definisikan integral untuk fungsi dua variable. Misalkan fungsi z = f(x,y) didefinisikan pada suatu daerah tertutup R di bidang xoy. Kemudian daerah ini dibagi atas n buah sub daerah yang masing-masing luasnya A_1 , A_2 , A_3 …… An

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{f}(x_k)\ \Delta x_k$$

Dalam setiap sub daerah, pilih suatu titik $P_k(x_k, y_k)$ dan bentuklah jumlah:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta_k A = f(x_1, y_1)\Delta_1 A + f(x_2, y_2)\Delta_2 A + \ldots\ldots + f(x_n, y_n)\Delta_n A$$

Jika jumlah sub daerah makin besar ($n \to \infty$), maka integral rangkap (lipat dua) dari fungsi f(x,y) atas daerah R didefinisikan:

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta_k A$$

Untuk menghitung integral lipat dua dapat digunakan integral berulang yang ditulis dalam bentuk :

a. $$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy \quad = \int_a^b \left\{ \int_{y=f_1(y)}^{y=f_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

- Di mana integral yang ada dalam kurung harus dihitung terlebih dahulu dengan menganggap variabel y konstanta, kemudian hasilnya diintegralkan kembali terhadap y.

b. $$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left\{ \int_{y=f_1(y)}^{y=f_2(y)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

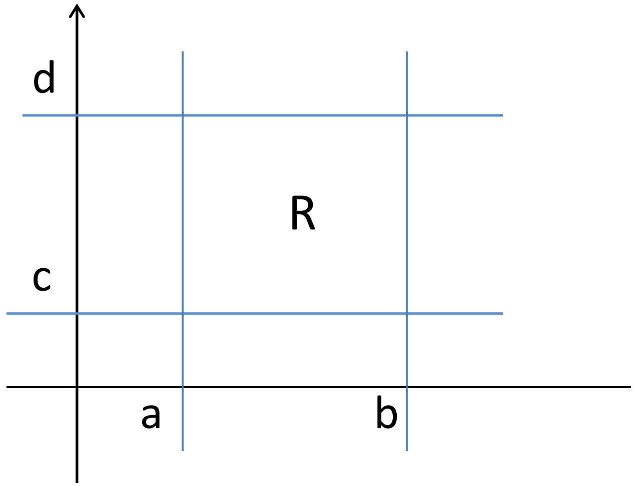
- Di mana integral yang ada dalam kurung harus dihitung terlebih dahulu dengan menganggap variable x konstanta, kemudian hasilnya diintegral kembali terhadap x.

- Jika integral lipat dua diatas ada, maka (a) dan (b) secara umum akan memberikan hasil yang sama.

INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN BATAS PERSEGI PANJANG

Bentuk umum: $$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint f(x,y)\,dx\,dy$$

Di mana : R = { (x,y) ; a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d }
a,b,c dan d adalah konstanta



CONTOH

1. $$\int_0^1 \int_1^2 dx\,dy$$

2. $$\int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

3. $$\int_2^4 \int_1^2 (xy + 3y^2)\,dy\,dx$$

4. $$\int_2^4 \int_0^{\pi/2} (\sin\theta + r\cos 2\theta)\,d\theta\,dr$$

INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN BATAS BUKAN PERSEGI PANJANG

$$a. \iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_1(x)}^{\mathrm{f}_2(x)} f(x,y)\,dy\,\mathrm{dx}$$

Di mana : R = { (x,y) ; $f_1(x) \le y \le f_2(x)$,a ≤ x ≤ b }

$$b. \iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=c}^{d} \int_{x=f_1(y)}^{\mathrm{f}_2(y)} f(x,y)\,dx\,\mathrm{dy}$$

Di mana : R = { (x,y) ; $f_1(y) \le x \le f_2(y)$,c ≤ y ≤ d }

CONTOH

1. $$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 \, dy\, dx$$

2. $$\int_1^2 \int_y^{3y} (x+y)\, dx\, dy$$

3. $$\int_0^1 \int_{2x^2}^{x^2+x} x \, dy\, dx$$

4. $$\int_{\pi}^{\pi/2} \int_{\cos 2\theta}^{\sin 2\theta} 2\, dr\, d\theta$$

APLIKASI INTEGRAL LIPAT DUA

Aplikasi integral lipat dua yang bentuk umumnya :

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

1. LUAS

Luas bidang dapat dipandang sebagai integral lipat dua jika f(x,y) = 1, sehingga integral lipat dua menjadi:

$$A = \iint_R dA \quad \text{atau } \mathrm{A} = \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{dxdy} = \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{dydx}$$

Dalam koordinat polar:

$$A = \iint_R dA = \int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta} \int_{\rho_1}^{\upsilon_2} \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta$$

CONTOH

1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $y = 0$, $x + y = 2$ dan $2y = x + 4$

2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh parabola-parabola: $y^2 = 4 - x$ dan $y^2 = 4 - 4x$

3. Hitung:

$$A = \iint_R dA$$

dengan R adalah daerah dikuadran pertama yang berada diluar lingkaran $r=2$ dan di dalam kardioda $r = 2(1+\cos\theta)$

2. VOLUME

Jika z=f(x,y) adalah persamaan permukaan , maka:

$$V = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

adalah volume benda antara permukaan dan bidang xoy.

Contoh:

Hitung volume benda yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 4$ dan bidang-bidang $y + z = 4$ dan $z = 0$

3. MASSA

Jika f(x,y) dipandang sebagai massa jenis (massa persatuan luas), maka:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy$$

merupakan massa dari benda itu.

Contoh:

Sebuah lamina (pelat tipis) dengan kerapatan $f(x,y)=xy$ dibatasi oleh sumbu x, garis $x = 2$ dan kurva $y=x^3$
Tentukan massa totalnya.

4. PUSAT MASSA

Jika f(x,y) merupakan massa jenis dari lamina (pelat tipis), maka pusat massanya (x,y) adalah sbb :

$$x = \frac{M_Y}{M} = \frac{\iint_S x\ f(x,y)\,dA}{\iint_S f(x,y)\,dA} , \qquad y = \frac{M_X}{M} = \frac{\iint_S y\ f(x,y)\,dA}{\iint_S f(x,y)\,dA}$$

Contoh:

Tentukan pusat massa dari lamina yang mempunyai kerapatan f(x,y) = xy dan dibatasi oleh sumbu x , garis x = 2 dan kurva $y = x^3$

5. MOMEN INERSIA

Momen Inersia dari pelat tipis yang mempunyai kerapatan f(x,y) terhadap sumbu x dan sumbu y adalah:

$$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)..dA \qquad I_y = \iint_R x^2 f(x,y)..dA$$

Sedangkan momen inersia terhadap sumbu z (titik asal) :

Contoh:

Tentukan momen inersia terhadap sumbu x, y dan z untuk lamina yang mempunyai kerapatan xy dan dibatasi sumbu x , garis = 2 dan kurva $y = x^3$

$$I_Z = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x,y)..dA$$

INTEGRAL LIPAT TIGA

Integral lipat tiga $\iiint\limits_R f(x,y,z)dV$ dari suatu fungsi tiga variabel bebas thd. daerah R, dimana fungsi bernilai tunggal dan kontinu, merupakan suatu pengembangan dari integral tunggal dan integral lipat dua.

Jika f(x,y,z) = 1, maka integral menjadi:

$\iiint\limits_R f(x,y,z)dV = \iiint dV$ dapat diartikan pengukuran volume daerah R

Dalam koordinat tegak lurus , integral tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\iiint_R f(x, y, z)\,dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{f(x, y, z)dzdydx}$$

Di mana:

$x_1 \leq x \leq x_2$

$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

$z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$

CONTOH

$$1. \int_1^2 \int_2^3 \int_3^4 xyz \, dzdydx$$

$$2. \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_0^{xy} 2z \, dzdydx$$

$$3. \int_0^1 \int_{x-2}^{x^2} \int_0^{x+y} 2xz \, dzdydx$$

$$4. \int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x-2y} (x+2z) \, dzdydx$$