Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial

Pengertian

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan di mana terdapat satu atau lebih turunan fungsi.

Persamaan diferensial diklasifikasikan sebagai:

1. Menurut jenis atau tipe: ada persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Jenis yang kedua tidak dibahas dalam kuliah ini.
2. Menurut orde: orde persamaan diferensial adalah orde tertinggi turunan fungsi yang ada dalam persamaan.
3. Menurut derajat: derajat suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan fungsi orde tertinggi.

Contoh:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + \frac{y}{x^2+1} = e^x$$

adalah persamaan diferensial biasa, orde tiga, derajat dua.

Persamaan Diferensial

Solusi

Suatu fungsi y = f(x) dikatakan merupakan solusi suatu persamaan diferensial jika persamaan tersebut tetap terpenuhi dengan digantikannya y dan turunannya dalam persamaan tersebut oleh f(x) dan turunannya.

Contoh: $y = ke^{-x}$ adalah solusi dari persamaan $\dfrac{dy}{dt} + y = 0$

karena turunan $y = ke^{-x}$ adalah $\dfrac{dy}{dt} = -ke^{-x}$

dan jika ini kita masukkan dalam persamaan akan kita peroleh

$$-ke^{-x} + ke^{-x} = 0$$

Persamaan terpenuhi.

Pada umumnya suatu persamaan orde n akan memiliki solusi yang mengandung *n* tetapan sembarang.

Persamaan Diferensial Orde Satu Dengan Peubah Yang Dapat Dipisahkan

Persamaan Orde Satu Peubah Dapat Dipisah

Persamaan Diferensial Orde Satu Dengan Peubah Yang Dapat Dipisahkan

Jika pemisahan ini bisa dilakukan maka persamaan dapat kita tuliskan dalam bentuk

$$f(y)dy + g(x)dx = 0$$

Apabila kita lakukan integrasi, kita akan mendapatkan solusi umum dengan satu tetapan sembarang *K*, yaitu

$$\int f(y)dy + \int g(x)dx) = K$$

Persamaan Orde Satu Peubah Dapat Dipisah

Contoh: $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

Persamaan ini dapat kita tuliskan $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{e^y}$

yang kemudian dapat kita tuliskan sebagai persamaan dengan peubah terpisah

$$e^y dy - e^x dx = 0$$

Integrasi kedua ruas: $\int e^y dy - \int e^x dx = K$

sehingga $e^y - e^x = K$ atau $e^y = e^x + K$

Persamaan Orde Satu Peubah Dapat Dipisah

Contoh: $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$$

Pemisahan peubah akan memberikan bentuk

$$ydy = \frac{dx}{x} \quad \text{atau} \quad ydy - \frac{dx}{x} = 0$$

Integrasi kedua ruas $\int ydy - \int \frac{dx}{x} = K$

$$\frac{y^2}{2} - \ln x = K$$

atau

$$y = \sqrt{\ln x^2 + K'}$$

Persamaan Diferensial Homogen Orde Satu

Persamaan Homogen Orde Satu

Persamaan Diferensial Homogen Orde Satu

Suatu persamaan disebut homogen jika ia dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ini dapat dijadikan sebagai peubah bebas baru

$v = \dfrac{y}{x}$ yang akan memberikan

$y = vx$ dan

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$$

Pemisahan peubah: $x\dfrac{dv}{dx} = F(v) - v$

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

atau: $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dv}{v - F(v)} = 0$

Persamaan Homogen Orde Satu

Contoh: $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

Usahakan menjadi homogen $x^2(1 + \frac{y^2}{x^2})dx + 2xydy = 0$

$$(1 + \frac{y^2}{x^2})dx = -2\frac{y}{x}dy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + (y/x)^2}{2(y/x)} = F(y/x)$$

Peubah baru $v = y/x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+v^2}{2v} = F(v)$$

$$y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{1+v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = -v - \frac{1+v^2}{2v} = -\frac{1+3v^2}{2v}$$

Peubah terpisah $\frac{2v\,dv}{1+3v^2} = -\frac{dx}{x}$ atau $\frac{dx}{x} + \frac{2v\,dv}{1+3v^2} = 0$

Persamaan Homogen Orde Satu

Kita harus mencari solusi persamaan ini untuk mendapatkan *v* sebagai fungsi *x*.

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v\,dv}{1+3v^2} = 0$$

Suku ke-dua ini berbentuk 1/x dan kita tahu bahwa $\dfrac{1}{x} = \dfrac{d(\ln x)}{dx}$

Kita coba hitung $\dfrac{d\ln(1+3v^2)}{dv} = \dfrac{d\ln(1+3v^2)}{d(1+3v^2)}\dfrac{d(1+3v^2)}{dv} = \dfrac{1}{1+3v^2}(6v)$

Hasil hitungan ini dapat digunakan untuk mengubah bentuk persamaan menjadi

$$\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\frac{d\ln(1+3v^2)}{dv}dv = 0$$

Integrasi ke-dua ruas: $\ln x + \dfrac{1}{3}\ln(1+3v^2) = K = \dfrac{1}{3}\ln K'$

$$3\ln x + \ln(1+3v^2) = K = \ln K'$$

$$x^3(1+3v^2) = K'$$

$$x^3\left(1+3(y/x)^2\right) = K' \;\Longrightarrow\; x\left(x^2+3y^2\right) = K'$$

Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Persamaan Linier Orde Satu

Dalam persamaan diferensial linier,
semua suku berderajat satu atau nol.

Oleh karena itu persamaan diferensial orde satu yang juga linier dapat kita tuliskan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

P dan *Q* merupakan fungsi *x* atau tetapan

Pembahasan akan dibatasi pada situasi dimana *P* adalah suatu tetapan. Hal ini kita lakukan karena pembahasan akan langsung dikaitkan dengan pemanfaatan praktis dalam analisis rangkaian listrik.

Persamaan diferensial yang akan ditinjau dituliskan secara umum sebagai

$$a\frac{dy}{dt} + by = f(t)$$

Dalam aplikasi pada analisis rangkaian listrik, *f*(*t*) tidak terlalu bervariasi. Mungkin ia bernilai 0, atau mempunyai *bentuk sinyal utama* yang hanya ada tiga, yaitu anak tangga, eksponensial, dan sinus. Kemungkinan lain adalah bahwa ia merupakan *bentuk komposit* yang merupakan gabungan dari bentuk utama.

Persamaan Linier Orde Satu

Persamaan diferensial linier orde satu seperti ini biasa kita temui pada peristiwa transien (atau peristiwa peralihan) dalam rangkaian listrik. Cara yang akan kita gunakan untuk mencari solusi adalah cara pendugaan

Peubah *y* adalah keluaran rangkaian (atau biasa disebut *tanggapan rangkaian*) yang dapat berupa tegangan ataupun arus sedangkan nilai *a* dan *b* ditentukan oleh nilai-nilai elemen yang membentuk rangkaian.

Fungsi *f*(*t*) adalah masukan pada rangkaian yang dapat berupa tegangan ataupun arus dan disebut *fungsi pemaksa* atau *fungsi penggerak*.

Persamaan diferensial linier mempunyai *solusi total* yang merupakan jumlah dari *solusi khusus* dan *solusi homogen*. Solusi khusus adalah fungsi yang dapat memenuhi persamaan yang diberikan, sedangkan solusi homogen adalah fungsi yang dapat memenuhi persamaan homogen

$$a\frac{dy}{dt}+by=0$$

Persamaan Linier Orde Satu

Hal ini dapat difahami karena jika $f_1(t)$ memenuhi persamaan yang diberikan dan fungsi $f_2(t)$ memenuhi persamaan homogen, maka $y = (f_1+f_2)$ akan juga memenuhi persamaan yang diberikan, sebab

$$a\frac{dy}{dt}+by = a\frac{d\left(f_1+f_2\right)}{dt}+b(f_1+f_2)$$

$$= a\frac{df_1}{dt}+bf_1+a\frac{df_2}{dt}+bf_2 = a\frac{df_1}{dt}+bf_1+0$$

Jadi $y = (f_1+f_2)$ adalah solusi dari persamaan yang diberikan, dan kita sebut *solusi total.* Dengan kata lain solusi total adalah jumlah dari solusi khusus dan solusi homogen.

Persamaan Linier Orde Satu

Solusi Homogen

Persamaan homogen $a\dfrac{dy}{dt}+by=0$

Jika y_a adalah solusinya maka

$$\frac{dy_a}{y_a}+\frac{b}{a}dt=0$$

Integrasi kedua ruas memberikan

$$\ln y_a+\frac{b}{a}t=K \;\longrightarrow\; \ln y_a=-\frac{b}{a}t+K$$

sehingga $\boxed{y_a=e^{-\frac{b}{a}t+K}=K_a e^{-(b/a)t}}$

Inilah solusi homogen

Persamaan Linier Orde Satu

Jika solusi khusus adalah y_p , maka

$$a\frac{dy_p}{dt}+by_p = f(t)$$

Bentuk $f(t)$ ini menentukan bagaimana bentuk y_p.

$$\text{Jika } f(t)=0 \rightarrow y_p = 0$$

$$\text{Jika } f(t)=A=\text{konstan}, \rightarrow y_p = \text{konstan} = K$$

$$\text{Jika } f(t)=Ae^{\alpha t} = \text{eksponensial}, \rightarrow y_p = \text{eksponensial} = Ke^{\alpha t}$$

$$\text{Jika } f(t)=A\sin\omega t\,,\ \text{atau } f(t)=A\cos\omega t \rightarrow y_p = K_c\cos\omega t + K_s\sin\omega t$$

Dugaan bentuk-bentuk solusi y_p yang tergantung dari $f(t)$ ini dapat diperoleh karena hanya dengan bentuk-bentuk seperti itulah persamaan diferensial dapat dipenuhi

Jika dugaan solusi total adalah $\boxed{y_{total} = y_p + K_a e^{-(b/a)t}}$

Masih harus ditentukan melalui kondisi awal.

Persamaan Linier Orde Satu

Contoh: Dari suatu analisis rangkaian diperoleh persamaan

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + 1000v = 0}$$

Carilah solusi total jika kondisi awal adalah *v* = 12 V.

Persamaan ini merupakan persamaan homogen, *f(t)* = 0.
Solusi khusus bernilai nol.

$$\frac{dv}{v} + 1000dt = 0$$

$$\ln v = -1000\,t + K$$

$$v = e^{-1000t+K} = K_a e^{-1000t}$$

Penerapan kondisi awal: $12 = K_a$

Solusi total: $\boxed{v = 12e^{-1000t} \text{ V}}$

Persamaan Linier Orde Satu

Contoh: Suatu analisis rangkaian memberikan persamaan

$$10^{-3}\frac{dv}{dt}+v=12$$

Dengan kondisi awal $v(0^+) = 0$ V , carilah tanggapan lengkap.

Solusi homogen: $$10^{-3}\frac{dv_a}{dt}+v_a=0 \;\longrightarrow\; \frac{dv_a}{v_a}+10^3 dt=0$$

$$v_a=K_a e^{-1000t}$$

Solusi khusus: $v_p=12$ karena $f(t) = 12$

Solusi total (dugaan): $v_{total}=12+K_a e^{-1000t}$

Penerapan kondisi awal: $0=12+K_a \;\longrightarrow\; K_a=-12$

Solusi total: $$v_{total}=12-12e^{-1000t}\ \text{V}$$

Persamaan Linier Orde Satu

Contoh: Pada kondisi awal v = 0 V, suatu analisis transien menghasilkan persamaan $\frac{dv}{dt} + 5v = 100\cos 10t$

Carilah solusi total.

Solusi homogen: $\frac{dv_a}{dt} + 5v_a = 0 \longrightarrow \frac{dv_a}{v_a} + 5dt = 0$

$$\ln v_a + 5t = K \longrightarrow v_a = K_a e^{-5t}$$

Solusi khusus: $v_p = A_c \cos 10t + A_s \sin 10t$

$$-10A_c \sin 10t + 10A_s \cos 10t + 5A_c \cos 10t + 5A_s \sin 10t = 100\cos 10t$$

$$10A_s \cos 10t + 5A_c \cos 10t = 100\cos 10t \longrightarrow 10A_s + 5A_c = 100$$

$$-10A_c \sin 10t + 5A_s \sin 10t = 0 \longrightarrow -10A_c + 5A_s = 0$$

$$A_s = 8 \quad A_c = 4$$

Solusi total (dugaan): $v = 4\cos 10t + 8\sin 10t + K_a e^{-5t}$

Penerapan kondisi awal: $0 = 4 + K_a \longrightarrow K_a = -4$

Solusi total : $v = 4\cos 10t + 8\sin 10t - 4e^{-5t}$