Matriks dan Ruang Vektor

Matriks dan Jenis Operasinya

Pengertian

Matriks : merupakan suatu alat atau sarana yang sangat ampuh untuk menyelesaikan model-model linear.

Definisi : Matriks adalah susunan empat persegi panjang atau bujur sangkar dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom ditulis antara dua tanda kurung, yaitu ( ) atau [ ]

Bentuk Umum :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elemen matriks : disebut juga unsur a_{ij}

Susunan bilangan atau fungsi a_{ij}

Ukuran matriks:

- Jumlah baris: m
- Jumlah kolom: n
- Ordo atau ukuran matriks: m x n
- Elemen-elemen diagonal: a_{11}, a_{12} ,..,a_{mn}

Contoh:

Matrix A_{3X3}= $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

Notasi matriks, menggunakan huruf besar (kapital)

Kesamaan matriks

matriks $A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$

$A = B$ jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua $i = 1,2 \,..\, m$ dan $j = 1,2,\ldots n$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = B$

$A \neq C$ (ukurannya tidak sama)

Matriks A dan Matriks B disebut sama, bila

- Ordo-ordonya sama
- Elemen-elemen yang seletak sama

Macam-macam Matriks

Matriks bujur sangkar

Suatu matriks di mana jumlah baris = jumlah kolom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A: matriks bujur sangkar berukuran m x n

Diagonal utama A: a_{11}, a_{12},....,a_{mn}

Contoh:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks Diagonal:

Matriks bujur sangkar di mana elemen-elemen pada diagonal utamanya <u>tidak semua elemennya nol</u>, sedangkan unsur-unsur yang lain adalah nol:

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Satuan (Matriks Identitas) :

Matriks bujur sangkar di mana elemen-elemen pada diagonal utamanya masing-masing adalah <u>satu,</u> sedangkan elemen-elemen yang lain adalah <u>nol</u>

Contoh : $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks Singular

Matriks bujur sangkar yang tidak mempunyai invers (berarti: determinannya = 0)

Matriks Non-Singular

Matriks bujur sangkar yang mempunyai invers (berarti: determinannya = 0)

Matriks Simetris

Matriks bujur sangkar di mana diagonal utamannya berfungsi sebagai cermin atau refleksi ($A^t = A$)

Contoh: $$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks Idempotent

Matriks bujur sangkar di mana berlaku $A^2 = A$ atau $A^n = A$, bila n = 2,3,4, …

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

Matriks Nilpotent

Matriks bujur sangkar di mana berlaku $A^3 = 0$ atau $A^n = 0$, bila n = 2,3,4, …

Contoh :

Matriks nilpotent dari ordo 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Matriks Nol : adalah matriks di mana semua unsur nol = 0

Matriks Identitas :

$$I_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3\,x\,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat matriks identitas dan Matriks nol

Jika A = matriks berukuran n x n

$I \, . \, A = A \, . \, I = A$

$A + 0 = 0 + A = A$

$A \, . \, 0 = 0 . A = 0$

Matriks Segitiga (Triangular matrix)

Matriks segitiga atas :

Matriks bujur sangkar, apabila setiap unsur yang terletak di bawah diagonal utamanya sama dengan nol

Contoh : $$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Bawah :

Matriks bujur sangkar bila setiap unsurnya yang terletak di atas diagonal utamanya sama dengan nol

Contoh : $B_{3x3} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

Operasi Aljabar Matriks

Penjumlahan dua matriks

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

Syarat penjumlahan dua matriks atau pengurangan dua matriks adalah mempunyai ordo yang sama.

Contoh:

Diketahui $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

Maka $C_{2x3} = A_{2x3} + B_{2x3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 11 \\ 13 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

Perkalian Bilangan Skalar dengan Suatu Matriks

Masing-masing elemen matriks tersebut dikalikan dengan bilangan skalar.

Misalkan bilangan skalar k = 4, dan

Matriks $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Maka $B_{2x3} = k * A_{2x3}$

$$B_{2x3} = 4 * \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 24 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$

Perkalian Dua Matriks

Perkalian 2 matriks

A : matriks berukuran m x k

B : matriks berukuran k x n

$$A.B = \underbrace{A_{m \times k} * B_{k \times n}}_{} = AB_{m \times n}$$

Syarat perkalian matriks

Jika matriks A berukuran m x n dan B berukuran p x q maka :
Perkalian matriks AB berordo m x q bisa dibentuk hanya jika n = p

Perkalian matriks BA berordo p x n bisa dibentuk hanya jika q = m

AB tidak selalu sama dengan BA (walaupun m = n = p = q)

Syarat :
Setiap baris ada matriks harus dikalikan pada setiap kolom pada matriks kedua
Banyaknya kolom pada matriks pertama harus sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua

Sifat –sifat Operasi Matriks

$A + B = B + A$ (sifat komutatif)

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (sifat asosiatif)

$k (A + B) = kA + kB$, k =sembarang bilangan

$A (B + C) = AB + AC$ (sifat distributif)

$(A + B) C = AC + BC$ (sifat distributif)

$A (B C) = (A B) C$ (sifat asosiatif)

Pada umumnya

$AB \neq BA$

$AB = 0$ tidak berakibat $A = 0$ atau $B = 0$

$AB = AC$ tidak berakibat $B = C$