

METODE NUMERIK

3SKS-TEKNIK INFORMATIKA-S1

Mohamad Sidiq

PERTEMUAN : 3 & 4



PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

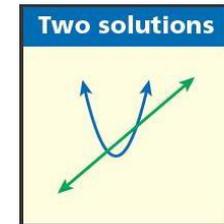
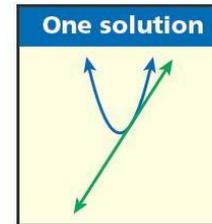
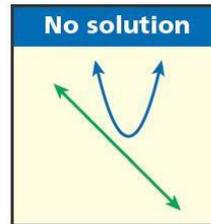
METODE NUMERIK

- TEKNIK INFORMATIKA – S1
- 3 SKS

Mohamad Sidiq

Nonlinear Systems

A system made up of a linear equation and a quadratic equation can have no solution, one solution, or two solutions, as shown below.



MATERI PERKULIAHAN

π

SEBELUM-UTS

- Pengantar Metode Numerik
- Sistem Bilangan dan Kesalahan
 - Penyajian Bilangan Bulat & Pecahan
 - Nilai Signifikan
 - Akurasi dan Presisi
 - Pendekatan dan Kesalahan
- **Penyelesaian Persamaan Non Linier**
 - **Metode Tabel**
 - **Metode Biseksi**
 - **Metode Regula Falsi**
- **Penyelesaian Persamaan Non Linier (Lanjutan)**
 - **Metode Iterasi Sederhana**
 - **Metode Newton Raphson**
 - **Metode Secant**
- Penyelesaian Persamaan Simultan
 - Metode Eliminasi Gauss
 - Metode Gauss Jordan
- Penyelesaian Persamaan Simultan (Lanjutan)
 - Metode Gauss Seidel
 - Studi Kasus
- Diferensi Numerik
 - Selisih Maju
 - Selisih Tengahan
 - Diferensi Tingkat Tinggi

SETELAH-UTS

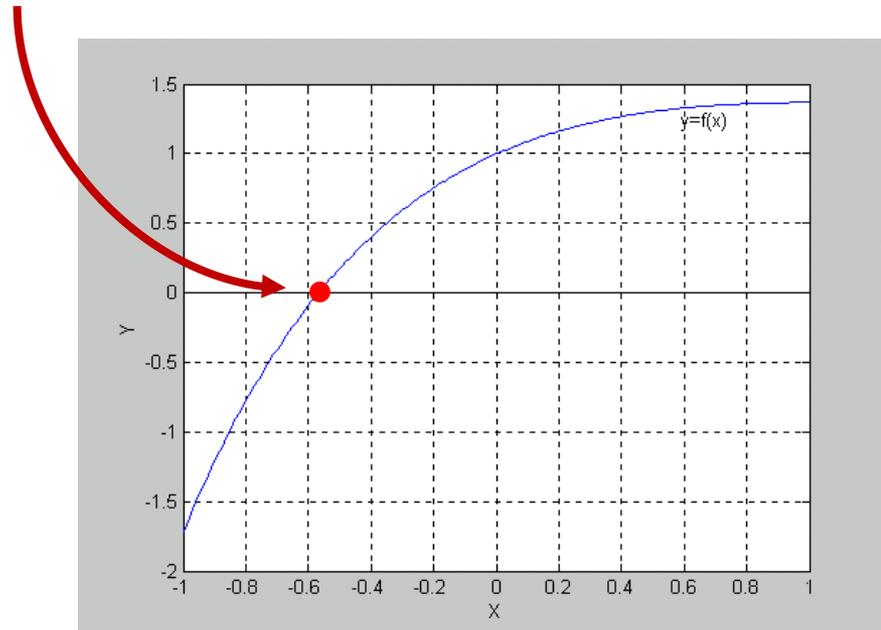
- Integrasi Numerik
 - Metode Reimann
 - Metode Trapezoida
 - Metode Simpson
- Integrasi Numerik (Lanjutan)
 - Metode Gauss
 - Studi Kasus
- Interpolasi
 - Metode Linier
 - Metode Kuadrat
- Interpolasi (Lanjutan)
 - Metode Polinomial
 - Metode Lagrange
- Regresi
 - Linier
 - Eksponensial
 - Polinomial
- Tugas Akhir Semester

PERSAMAAN NON LINIER

π

Fokus pada menentukan akar-akar persamaan non linier.

- Akar sebuah persamaan $f(x) = 0$ adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan nol.
- Akar persamaan $f(x)$ adalah titik potong antara kurva $f(x)$ dan sumbu X .



PERSAMAAN NON LINIER

π

- Penyelesaian persamaan linier $mx + c = 0$ dimana m dan c adalah konstanta, dapat dihitung dengan :

$$mx + c = 0$$
$$x = -\frac{c}{m}$$

- Penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dihitung dengan menggunakan rumus ABC.

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

■ Metode Tertutup

- Mencari akar pada range $[a,b]$ tertentu
- Dalam range $[a,b]$ dipastikan terdapat satu akar
- Hasil selalu konvergen → disebut juga metode konvergen

■ Metode Terbuka

- Diperlukan tebakan awal
- x_n dipakai untuk menghitung x_{n+1}
- Hasil dapat konvergen atau divergen

PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

Metode Tertutup

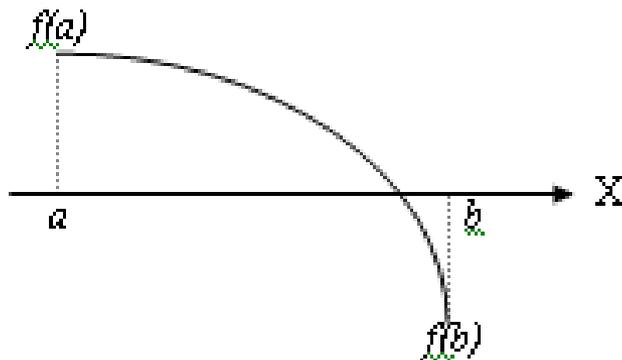
- Metode Tabel
- Metode Biseksi
- Metode Regula Falsi

Metode Terbuka

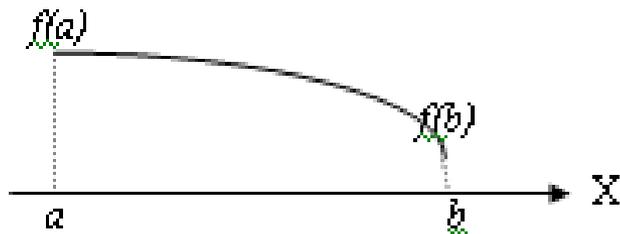
- Metode Iterasi Sederhana
- Metode Newton-Raphson
- Metode Secant

THEOREMA

- Suatu range $x=[a,b]$ mempunyai akar bila $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda atau memenuhi $f(a).f(b)<0$
- Theorema di atas dapat dijelaskan dengan grafik-grafik sebagai berikut:



➔ Karena $f(a).f(b)<0$ maka pada range $x=[a,b]$ terdapat akar.



➔ Karena $f(a).f(b)>0$ maka pada range $x=[a,b]$ tidak dapat dikatakan terdapat akar.

METODE TABEL :: PRINSIP

- Metode Tabel atau pembagian area.
- Di mana untuk x di antara a dan b dibagi sebanyak N bagian dan pada masing-masing bagian dihitung nilai $f(x)$ sehingga diperoleh tabel :

x	$f(x)$
$x_0=a$	$f(a)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
.....
$x_n=b$	$f(b)$

METODE TABEL :: TAHAPAN

- (1) Definisikan fungsi $f(x)$
- (2) Tentukan range untuk x yang berupa batas bawah x_{bawah} dan batas atas x_{atas} .
- (3) Tentukan jumlah pembagian N
- (4) Hitung step pembagi h

$$H = \frac{x_{\text{atas}} - x_{\text{bawah}}}{N}$$

- (5) Untuk $i = 0$ s/d N , hitung

$$x_i = x_{\text{bawah}} + i.h$$

$$y_i = f(x_i)$$

- (6) Untuk $I = 0$ s/d N dicari k dimana

*. Bila $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah penyelesaian

*. Bila $f(x_k).f(x_{k+1}) < 0$ maka :

- Bila $|f(x_k)| < |f(x_{k+1})|$ maka x_k adalah penyelesaian
- Bila tidak x_{k+1} adalah penyelesaian atau dapat dikatakan penyelesaian berada di antara x_k dan x_{k+1} .

METODE TABEL :: CONTOH

- Selesaikan persamaan:

$$x + e^x = 0 \text{ dengan range } x = [-1, 0]$$

- Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan di atas range $x = [-1, 0]$ dibagi menjadi beberapa bagian atau interval kecil, misal sebanyak 10 bagian.
- Sehingga diperoleh:

x	f(x)
-1.0	-0.63212
-0.9	-0.49343
-0.8	-0.35067
-0.7	-0.20341
-0.6	-0.05119
-0.5	0.10653
-0.4	0.27032
-0.3	0.44082
-0.2	0.61873
-0.1	0.80484
0.0	1.00000

METODE TABEL :: CONTOH

- Dari tabel diperoleh penyelesaian berada di antara -0.6 dan -0.5 dengan nilai $f(x)$ masing-masing -0.0512 dan 0.1065 .
sehingga dapat diambil keputusan penyelesaiannya di $x = -0.6$ ($f(x)$ yang terdekat dengan 0).
- Bila pada range $x = [-0.6, -0.5]$ dibagi 10 maka diperoleh $f(x)$ terdekat dengan nol pada $x = -0.57$ dengan $f(x) = 0.00447$

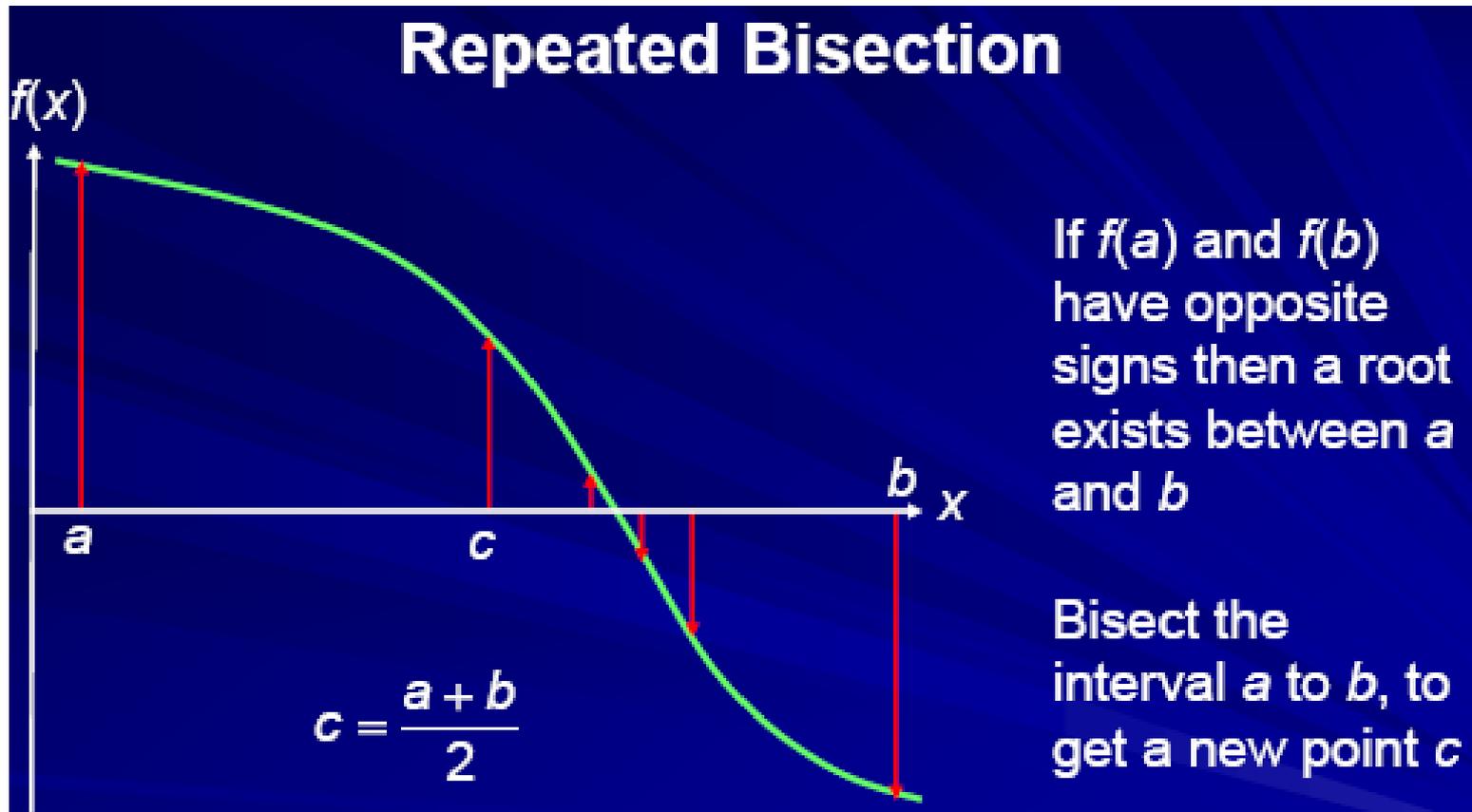
METODE TABEL :: KELEMAHAN

- Metode table ini secara umum sulit mendapatkan penyelesaian dengan error yang kecil, karena itu metode ini sering tidak digunakan dalam mencari akar penyelesaian persamaan non linier
- Tetapi metode ini digunakan sebagai taksiran awal mengetahui area penyelesaian yang benar sebelum menggunakan metode yang lebih baik dalam menentukan penyelesaian.

METODE BISEKSI :: PRINSIP

- Ide awal metode ini adalah metode tabel, di mana area dibagi menjadi N bagian.
- Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung akar dan bagian yang tidak mengandung akar dibuang. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.

METODE BISEKSI :: PRINSIP



METODE BISEKSI :: PRINSIP

- Untuk menggunakan metode biseksi, terlebih dahulu ditentukan batas bawah (a) dan batas atas (b). Kemudian dihitung nilai tengah :

$$x = \frac{a + b}{2}$$

- Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar. Secara matematik, suatu range terdapat akar persamaan bila $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda atau dituliskan :

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

- Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah dan batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yang mempunyai akar.

METODE BISEKSI :: ALGORITMA

π

Algoritma Metode Biseksi

- (1) Definisikan fungsi $f(x)$ yang akan dicari akarnya
- (2) Tentukan nilai a dan b
- (3) Tentukan toleransi e dan iterasi maksimum N
- (4) Hitung $f(a)$ dan $f(b)$
- (5) Jika $f(a).f(b) > 0$ maka proses dihentikan karena tidak ada akar, bila tidak dilanjutkan
- (6) Hitung $x = \frac{a+b}{2}$
- (7) Hitung $f(x)$
- (8) Bila $f(x).f(a) < 0$ maka $b = x$ dan $f(b) = f(x)$, bila tidak $a = x$ dan $f(a) = f(x)$
- (9) Jika $|b-a| < e$ atau iterasi $>$ iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar = x , dan bila tidak, ulangi langkah 6.

METODE BISEKSI :: CONTOH

- Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1 = 0$, dengan menggunakan range $x=[-1,0]$, maka diperoleh tabel biseksi sebagai berikut:

iterasi	a	B	x	f(x)	f(a)	Keterangan
1	-1	0	-0,5	0,175639	-1,71828	berlawanan tanda
2	-1	-0,5	-0,75	-0,58775	-1,71828	
3	-0,75	-0,5	-0,625	-0,16765	-0,58775	
4	-0,625	-0,5	-0,5625	0,012782	-0,16765	berlawanan tanda
5	-0,625	-0,5625	-0,59375	-0,07514	-0,16765	
6	-0,59375	-0,5625	-0,57813	-0,03062	-0,07514	
7	-0,57813	-0,5625	-0,57031	-0,00878	-0,03062	
8	-0,57031	-0,5625	-0,56641	0,002035	-0,00878	berlawanan tanda
9	-0,57031	-0,56641	-0,56836	-0,00336	-0,00878	
10	-0,56836	-0,56641	-0,56738	-0,00066	-0,00336	

METODE BISEKSI :: CONTOH

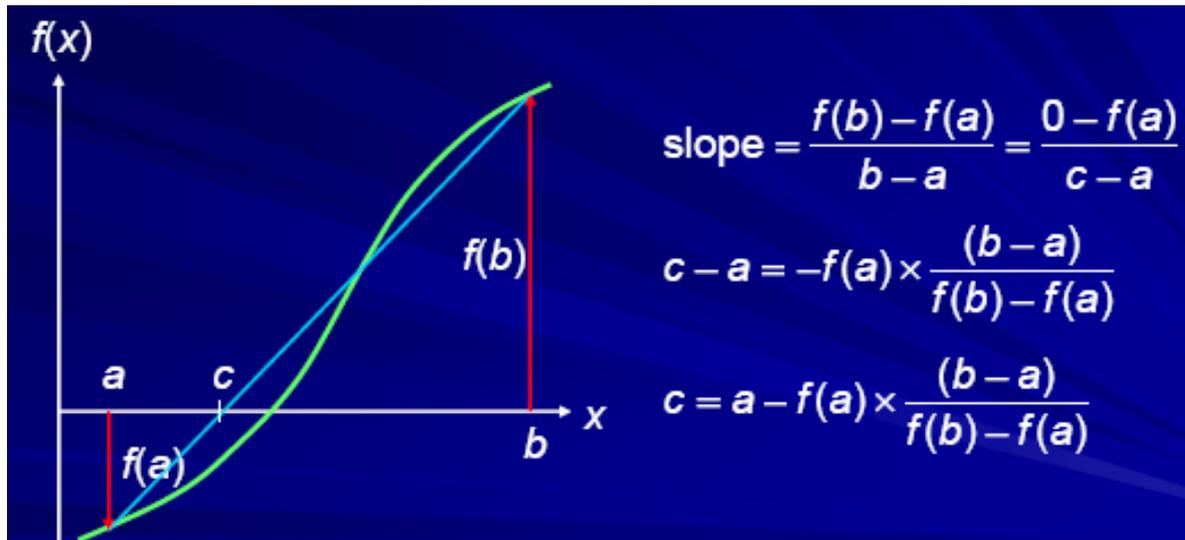
- Di mana $x = \frac{a + b}{2}$

Pada iterasi ke 10 diperoleh nilai $x = -0.56738$ dan nilai $f(x) = -0.00066$

- Untuk menghentikan iterasi, dapat dilakukan dengan menggunakan toleransi error atau iterasi maksimum.
- *Catatan:* Dengan menggunakan metode biseksi dengan toleransi error 0.001 dibutuhkan 10 iterasi, semakin teliti (kecil toleransi errornya) maka semakin besar jumlah iterasi yang dibutuhkan.

METODE REGULA FALSI :: PRINSIP

- Metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas range.
- Dua titik a dan b pada fungsi $f(x)$ digunakan untuk mengestimasi posisi c dari akar interpolasi linier.
- Dikenal dengan metode False Position



METODE REGULA FALSI :: PRINSIP

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - 0}{b - x}$$

$$x = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

METODE REGULA FALSI :: HOW TO

1. definisikan fungsi $f(x)$
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)
3. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
4. Hitung $F_a = f(a)$ dan $F_b = f(b)$
5. Untuk iterasi $I = 1$ s/d n atau error $> e$
 - $x = \frac{F_b \cdot a - F_a \cdot b}{F_b - F_a}$
 - Hitung $F_x = f(x)$
 - Hitung error = $|F_x|$
 - Jika $F_x \cdot F_a < 0$ maka $b = x$ dan $F_b = F_x$ jika tidak $a = x$ dan $F_a = F_x$.
6. Akar persamaan adalah x .

METODE REGULA FALSI :: CONTOH

- Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1=0$ pada range $x= [0,-1]$

iterasi	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
1	-1	0	-0,36788	0,468536	-1,71828	1
2	-1	-0,36788	0,074805	1,069413	-1,71828	0,468536
3	-1	0,074805	-0,42973	0,339579	-1,71828	1,069413
4	-1	-0,42973	0,1938	1,159657	-1,71828	0,339579
5	-1	0,1938	-0,51866	0,128778	-1,71828	1,159657
6	-1	-0,51866	0,412775	1,273179	-1,71828	0,128778
7	-1	0,412775	-0,6627	-0,28565	-1,71828	1,273179
8	-0,6627	0,412775	-0,6169	-0,14323	-0,28565	1,273179
9	-0,6169	0,412775	-0,59626	-0,0824	-0,14323	1,273179
10	-0,59626	0,412775	-0,58511	-0,05037	-0,0824	1,273179
11	-0,58511	0,412775	-0,57855	-0,03181	-0,05037	1,273179
12	-0,57855	0,412775	-0,57451	-0,02047	-0,03181	1,273179
13	-0,57451	0,412775	-0,57195	-0,01333	-0,02047	1,273179
14	-0,57195	0,412775	-0,5703	-0,00874	-0,01333	1,273179

Metode Regula Falsi :: Contoh

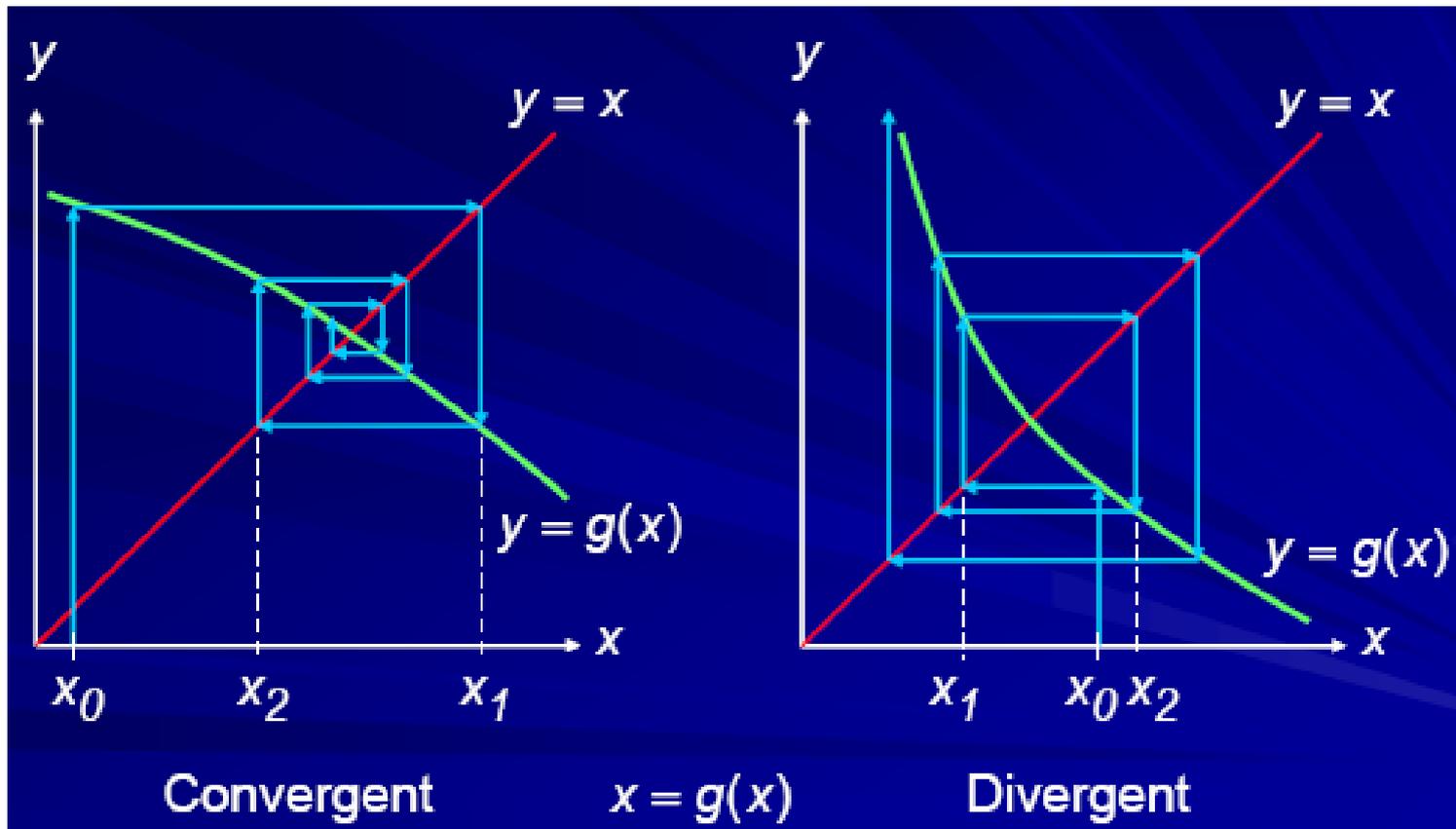
iterasi	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
15	-0,5703	0,412775	-0,56922	-0,00576	-0,00874	1,273179
16	-0,56922	0,412775	-0,56852	-0,00381	-0,00576	1,273179
17	-0,56852	0,412775	-0,56806	-0,00252	-0,00381	1,273179
18	-0,56806	0,412775	-0,56775	-0,00167	-0,00252	1,273179
19	-0,56775	0,412775	-0,56755	-0,00111	-0,00167	1,273179
20	-0,56755	0,412775	-0,56741	-0,00074	-0,00111	1,273179

Akar persamaan diperoleh di $x=-0.56741$
dengan kesalahan $e =0,00074$

METODE ITERASI SEDERHANA :: PRINSIP

- Metode iterasi sederhana adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh: $x = g(x)$.
- Contoh:
 - $x - e^x = 0 \rightarrow$ diubah menjadi:
 $x = e^x$ atau $g(x) = e^x$
- $g(x)$ inilah yang menjadi dasar iterasi pada metode iterasi sederhana ini

METODE ITERASI SEDERHANA :: PRINSIP



METODE ITERASI SEDERHANA :: CONTOH

- Carilah akar pers $f(x) = x^2 - 2x - 3$

- $x^2 - 2x - 3 = 0$

- $x^2 = 2x + 3$

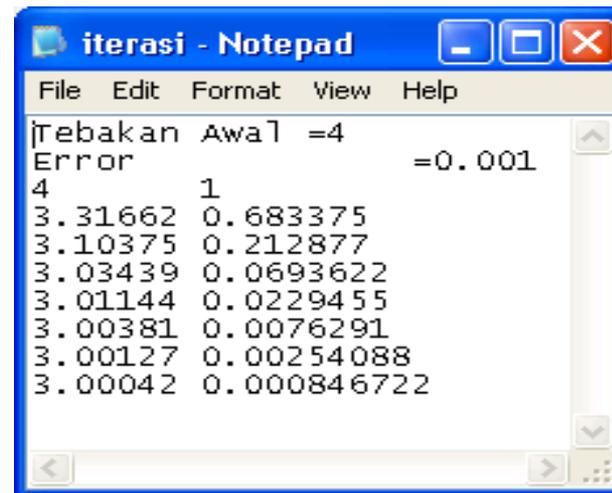
$$x = \sqrt{2x + 3}$$

- Tebakan awal = 4

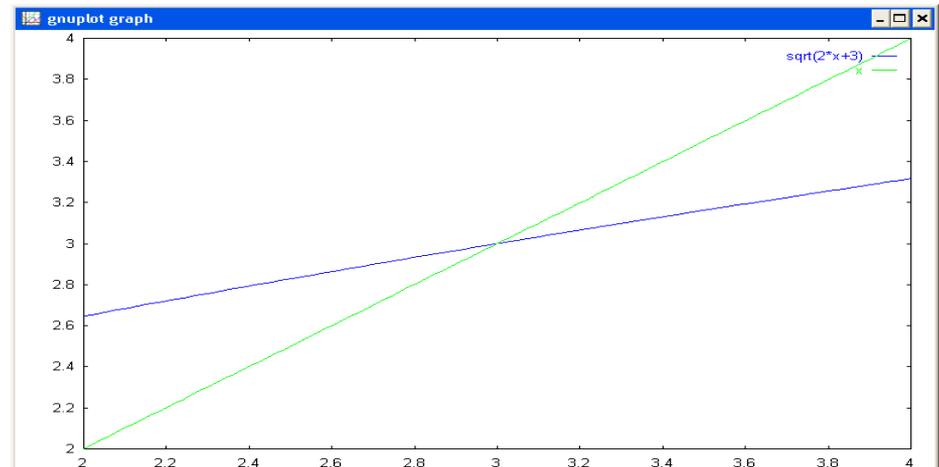
- $E = 0.00001$

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$$

- Hasil = 3



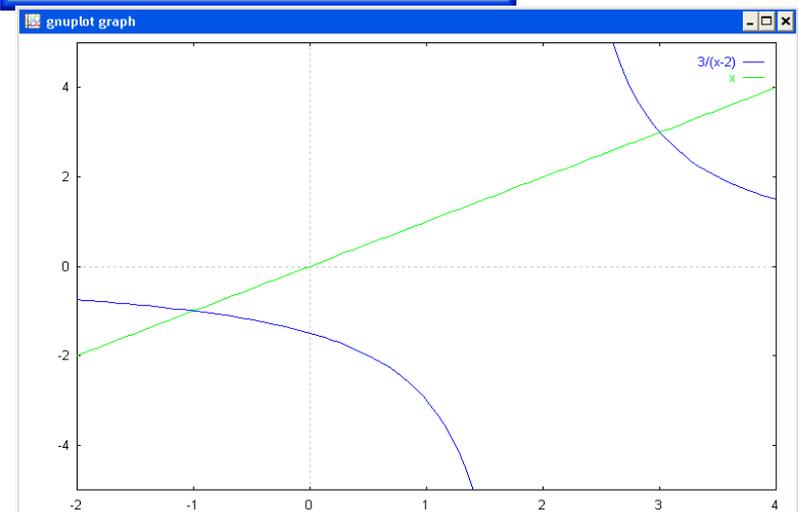
```
iterasi - Notepad
File Edit Format View Help
Tebakan Awal =4
Error =0.001
4      1
3.31662 0.683375
3.10375 0.212877
3.03439 0.0693622
3.01144 0.0229455
3.00381 0.0076291
3.00127 0.00254088
3.00042 0.000846722
```



METODE ITERASI SEDERHANA :: CONTOH

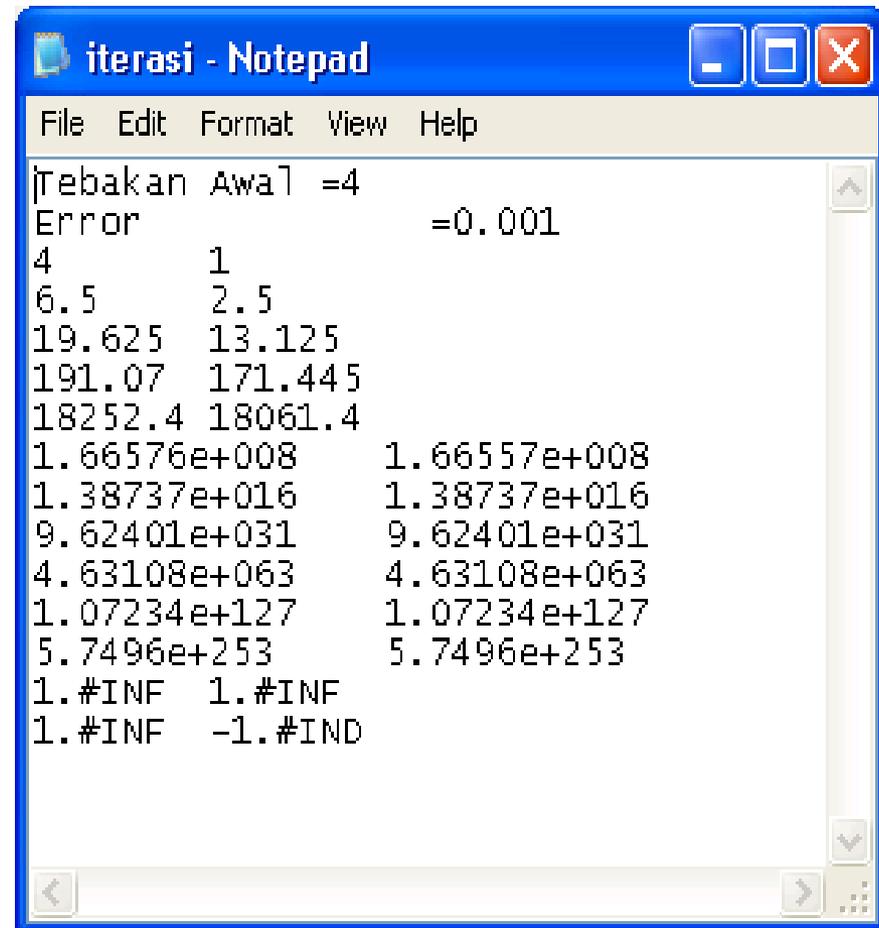
- $x^2 - 2x - 3 = 0$
- $x(x-2) = 3$
- $x = 3 / (x-2)$
- Tebakan awal = 4
- $E = 0.00001$
- Hasil = -1

```
iterasi - Notepad
File Edit Format View Help
Tebakan Awal =4
Error =0.001
4      1
1.5    2.5
-6     7.5
-0.375 5.625
-1.26316      0.888158
-0.919355    0.343803
-1.02762     0.108269
-0.990876    0.0367484
-1.00305     0.0121747
-0.998984    0.00406649
-1.00034     0.00135458
-0.999887    0.000451628
```



METODE ITERASI SEDERHANA :: CONTOH

- $x^2 - 2x - 3 = 0$
- $x = (x^2 - 3)/2$
- Tebakan awal = 4
- $E = 0.00001$
- Hasil divergen



```
iterasi - Notepad
File Edit Format View Help
[Tebakan Awal] =4
Error =0.001
4      1
6.5    2.5
19.625 13.125
191.07 171.445
18252.4 18061.4
1.66576e+008 1.66557e+008
1.38737e+016 1.38737e+016
9.62401e+031 9.62401e+031
4.63108e+063 4.63108e+063
1.07234e+127 1.07234e+127
5.7496e+253 5.7496e+253
1. #INF 1. #INF
1. #INF -1. #IND
```

SYARAT KONVERGENSI

Pada range $I = [s-h, s+h]$ dengan s titik tetap

- Jika $0 < g'(x) < 1$ untuk setiap $x \in I$ iterasi konvergen monoton.
- Jika $-1 < g'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$ iterasi konvergen berosilasi.
- Jika $g'(x) > 1$ untuk setiap $x \in I$, maka iterasi divergen monoton.
- Jika $g'(x) < -1$ untuk setiap $x \in I$, maka iterasi divergen berosilasi.

KONVERGENSI :: CONTOH

$$x_{r+1} = \sqrt{2x_r + 3}$$

$$g(x) = \sqrt{2x_r + 3}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_r + 3}}$$

- Tebakan awal 4
- $G'(4) = 0.3015 < 1$
- Konvergen Monoton

$$x_{r+1} = \frac{3}{(x_r - 2)}$$

$$g(x) = \frac{3}{(x-2)}$$

$$g'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

- Tebakan awal 4
- $G'(4) = |-0.75| < 1$
- Konvergen Berisolasi

KONVERGENSI :: CONTOH

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3)}{2}$$

$$g'(x) = x$$

- Tebakan awal 4
- $G'(4) = 4 > 1$
- Divergen Monoton

METODE ITERASI SEDERHANA :: LATIHAN SOAL

- Apa yang terjadi dengan pemilihan x^0 pada pencarian akar persamaan :

- $x^3 + 6x - 3 = 0$

- Dengan:

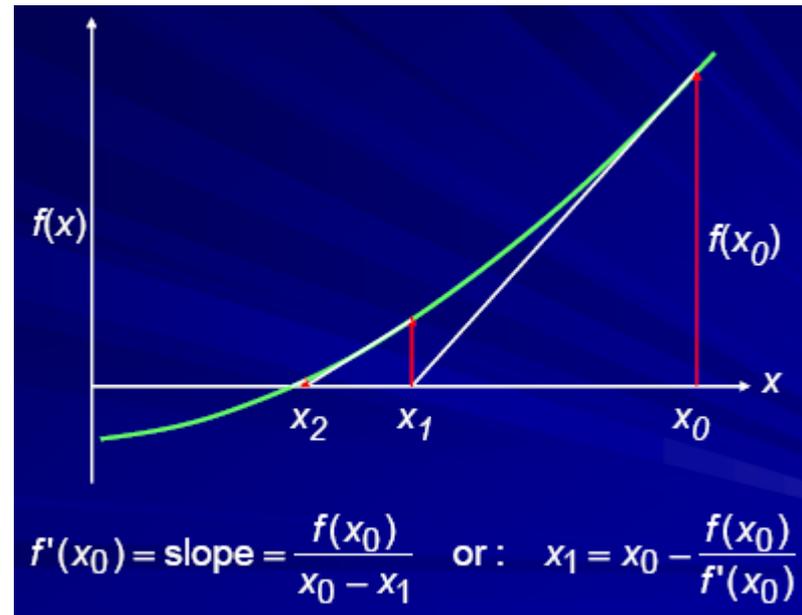
$$x_{r+1} = \frac{-x_r^3 + 3}{6}$$

- Cari akar persamaan dengan $x^0 = 0.5$; $x^0 = 1.5$,
 $x^0 = 2.2$, $x^0 = 2.7$

METODE NEWTON RAPHSON :: PRINSIP

- Metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut. Titik pendekatan ke $n+1$ dituliskan dengan:

$$\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$



METODE NEWTON RAPHSON :: TAHAP

1. Definisikan fungsi $f(x)$ dan $f'(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$
5. Untuk iterasi $l = 1$ s/d n atau $|f(x_i)| > e$
 - Hitung $f(x_i)$ dan $f'(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

6. Akar persamaan adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH

- Selesaikan persamaan $x - e^{-x} = 0$ dengan titik pendekatan awal $x_0 = 0$

- $f(x) = x - e^{-x} \rightarrow f'(x) = 1 + e^{-x}$

- $f(x_0) = 0 - e^{-0} = -1$

- $f'(x_0) = 1 + e^{-0} = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2} = 0,5$$

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH

- $f(x_1) = -0.106631$ dan $f'(x_1) = 1.60653$

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.5 - \frac{-0,106531}{1,60653} = 0.566311$$

- $f(x_2) = -0.00130451$ dan $f'(x_2) = 1.56762$

$$x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.566311 - \frac{-0.00130451}{1.56762} = 0,567143$$

- $f(x_3) = -1.96 \cdot 10^{-7}$. Suatu bilangan yang sangat kecil.
- Sehingga akar persamaan $x = 0.567143$.

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH

- $x - e^{-x} = 0 \rightarrow x_0 = 0, e = 0.00001$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0	-1	2
1	0.5	-0.106531	1.60653
2	0.566311	-0.00130451	1.56762
3	0.567143	-1.9648e-007	1.56714

Akar terletak di $x = 0.567143$

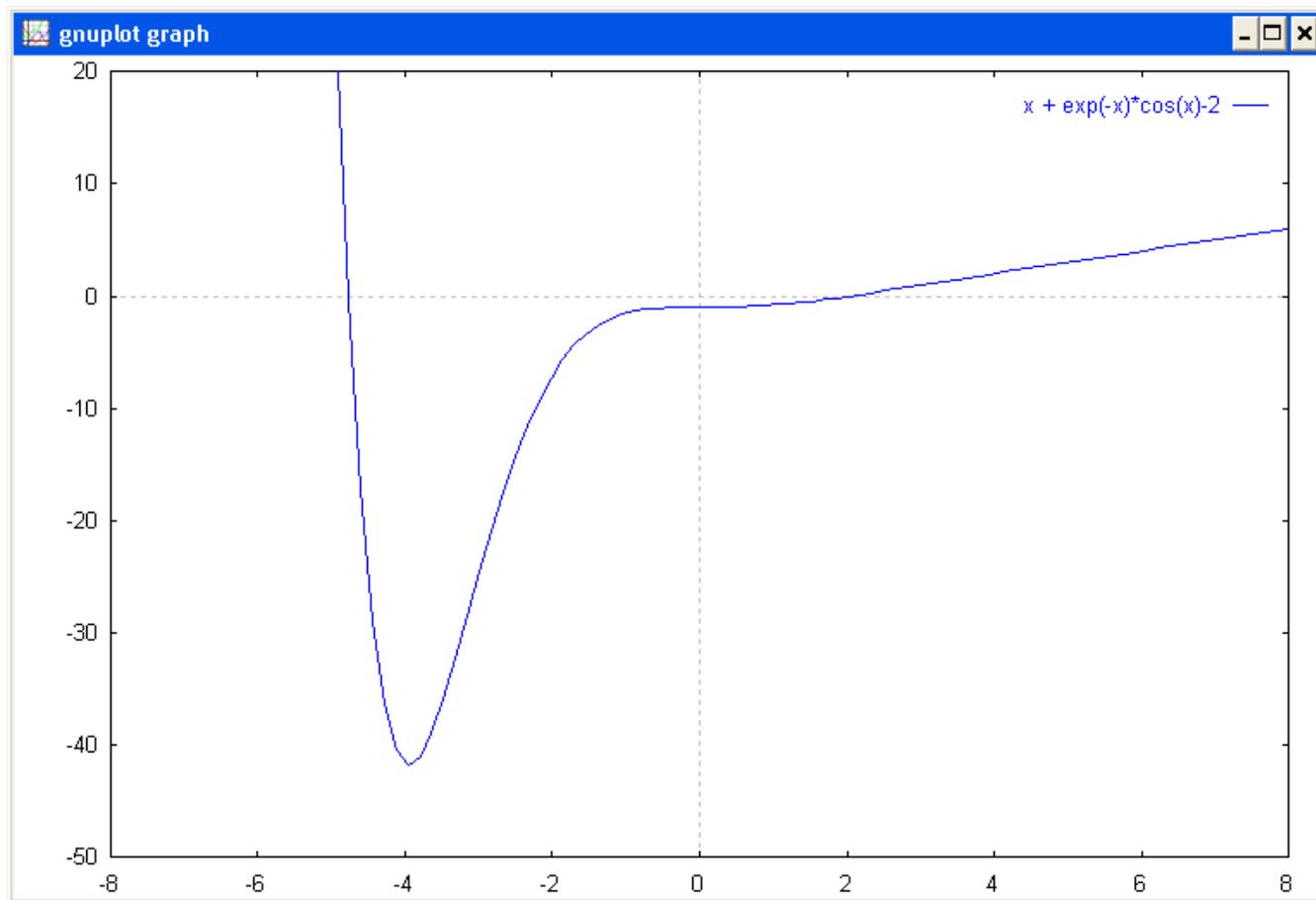
METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH

- $x + e^{-x} \cos x - 2 = 0 \rightarrow x_0=1$
- $f(x) = x + e^{-x} \cos x - 2$
- $f'(x) = 1 - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	1	-0.801234	0.491674
1	2.6296	0.566743	1.02753
2	2.07805	0.0172411	0.951394
3	2.05993	3.62703e-005	0.947372
4	2.05989	1.64926e-010	0.947364

Akar terletak di $x = 2.05989$

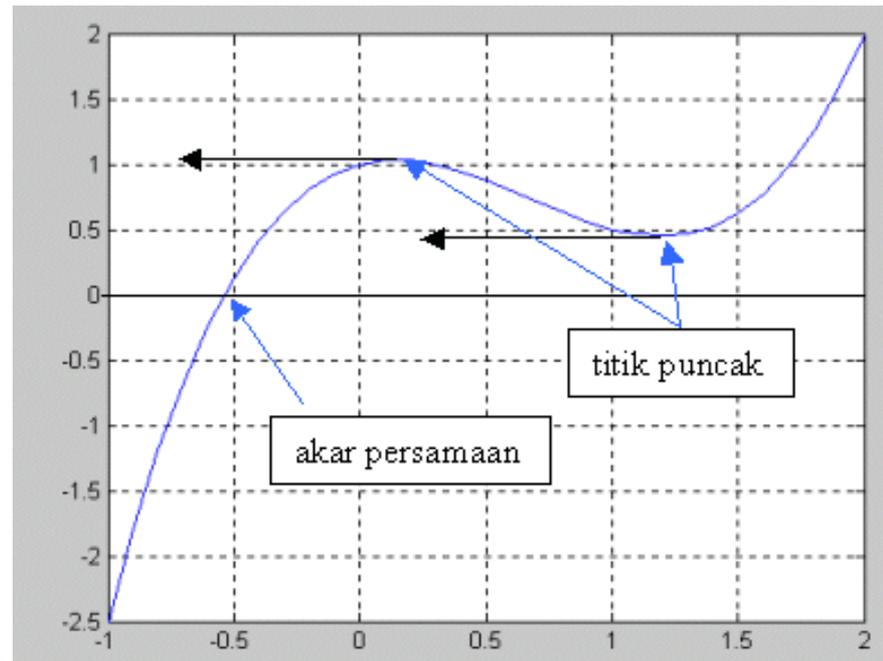
METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH



METODE NEWTON RAPHSON :: PERMASALAHAN

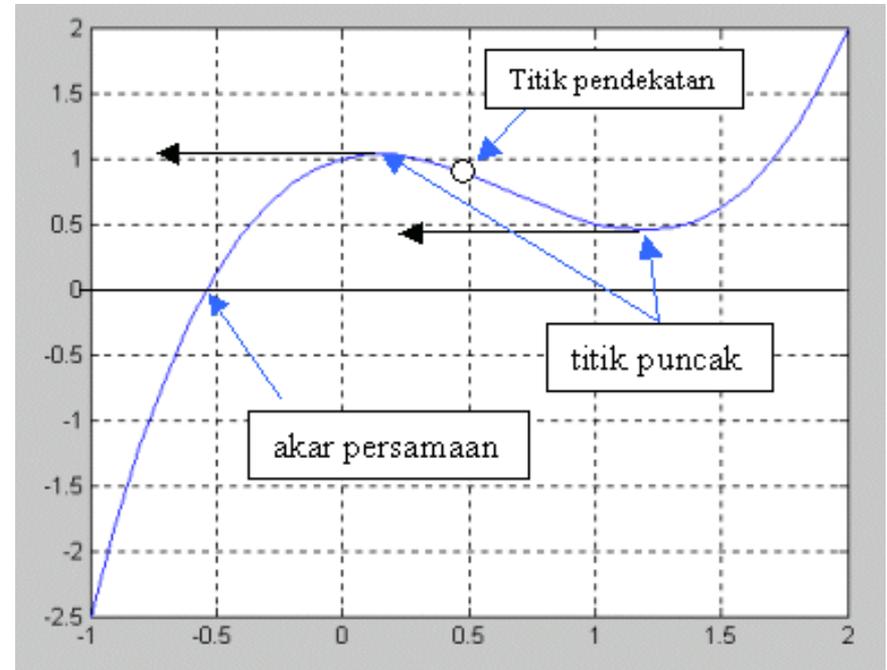
- Metode ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai $F^1(x) = 0$ sehingga nilai penyebut dari $\frac{F(x)}{F^1(x)}$ sama dengan nol, secara grafis dapat dilihat sebagai berikut:

Bila titik pendekatan berada pada titik puncak, maka titik selanjutnya akan berada di tak berhingga.



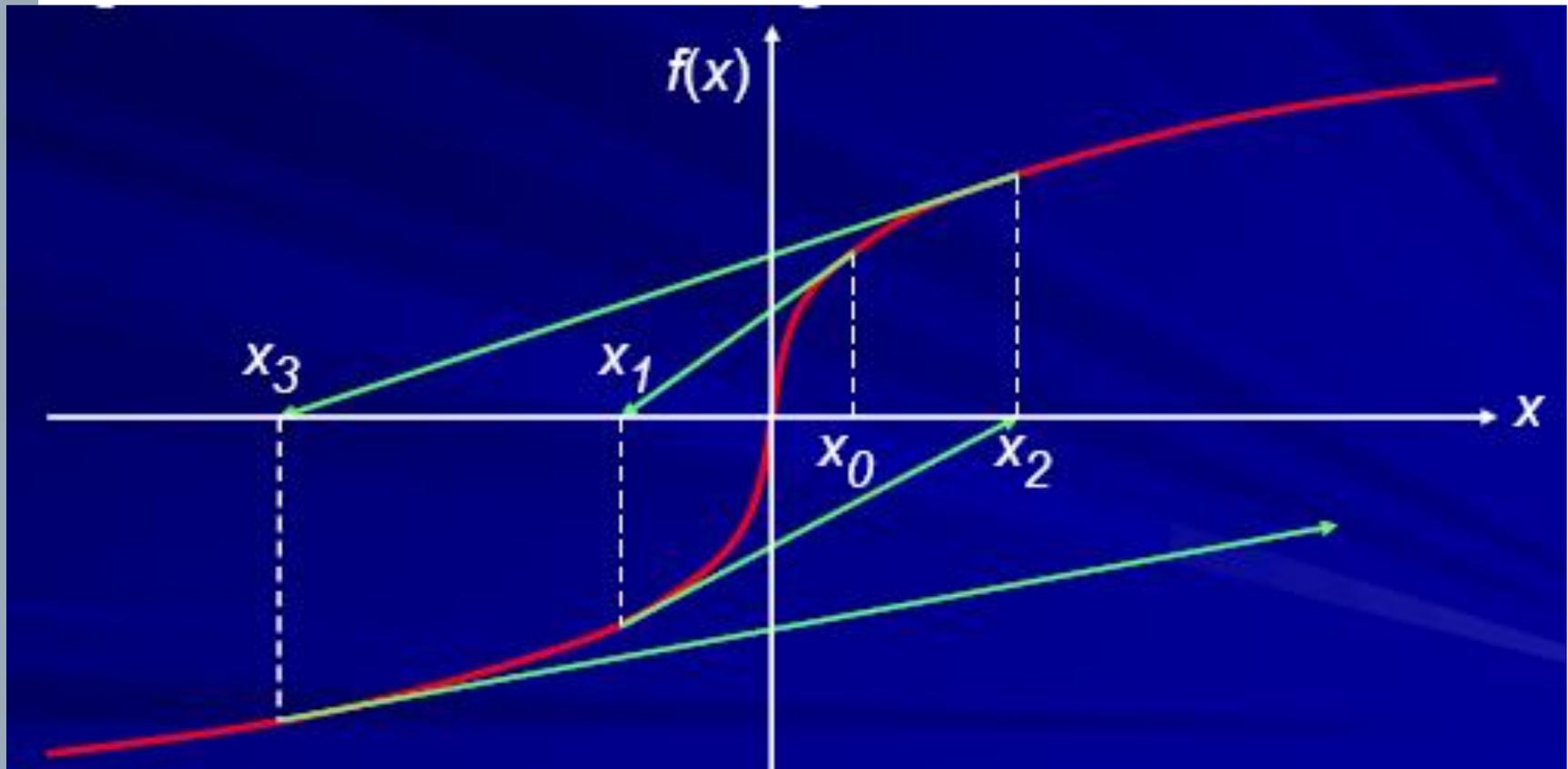
METODE NEWTON RAPHSON :: PERMASALAHAN

- Metode ini menjadi sulit atau lama mendapatkan penyelesaian ketika titik pendekatannya berada di antara dua titik stasioner.
- Bila titik pendekatan berada pada dua titik puncak akan dapat mengakibatkan hilangnya penyelesaian (*divergensi*).
- Hal ini disebabkan titik selanjutnya berada pada salah satu titik puncak atau arah pendekatannya berbeda.



π

HASIL TIDAK KONVERGEN



METODE NEWTON RAPHSON :: PENYELESAIAN PERMASALAHAN

1. Bila titik pendekatan berada pada titik puncak maka titik pendekatan tersebut harus di geser sedikit, $x_i = x_i \pm \delta$ di mana δ adalah konstanta yang ditentukan dengan demikian $F^1(x_i) \neq 0$ dan metode newton raphson tetap dapat berjalan.
2. Untuk menghindari titik-titik pendekatan yang berada jauh, sebaiknya pemakaian metode newton raphson ini didahului oleh metode tabel, sehingga dapat di jamin konvergensi dari metode newton raphson.

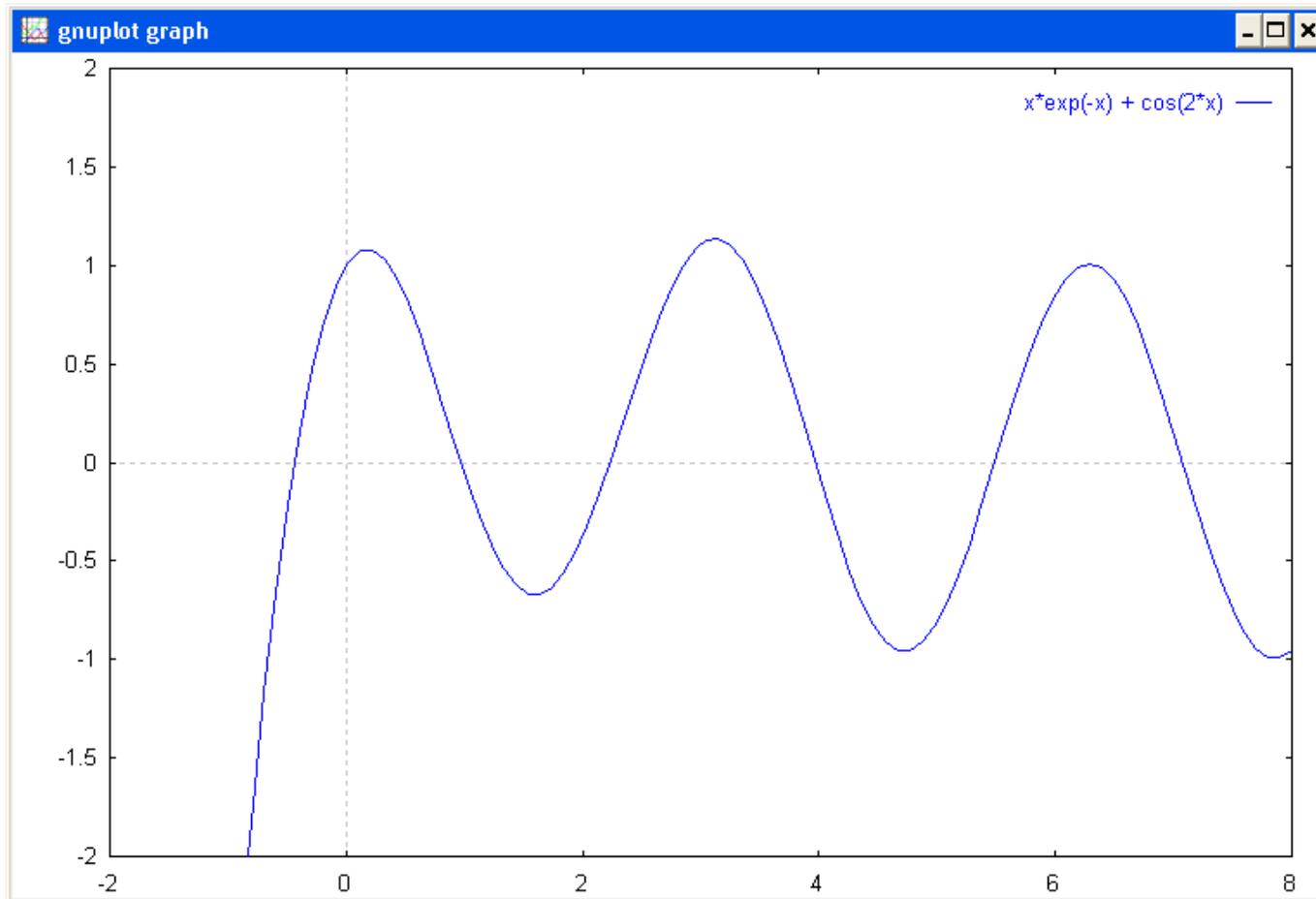
METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN

- $x \cdot e^{-x} + \cos(2x) = 0 \rightarrow x_0 = 0,176281$
- $f(x) = x \cdot e^{-x} + \cos(2x)$
- $f'(x) = (1-x) e^{-x} - 2 \sin(2x)$
- $f(x_0) = 1,086282$
- $f'(x_0) = -0,000015$

iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,17628	1,086282	-1,52216E-05
1	71364,89	0,594134	-1,608732696
2	71365,26	-0,10227	-1,989513691
3	71365,2	0,00036	-1,99999987
4	71365,2	-2,9E-11	-2
5	71365,2	3,13E-13	-2
6	71365,2	3,13E-13	-2

X = 71365.2
padahal dalam
range 0
sampai dengan
1 terdapat
akar di sekitar
0.5 s/d 1.

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN



METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN

- Untuk menghindari hal ini sebaiknya digunakan grafik atau tabel sehingga dapat diperoleh pendekatan awal yang baik. Digunakan pendekatan awal $x_0=0.5$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,5	0,843568	-1,37967664
1	1,111424	-0,24106	-1,626349133
2	0,963203	0,019463	-1,86082504
3	0,973662	5,61E-05	-1,849946271
4	0,973692	4,98E-10	-1,849913417
5	0,973692	0	-1,849913417
6	0,973692	0	-1,849913417

X



METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0.5	0.843568	-1.37968
1	1.11142	-0.24106	-1.62635
2	0.963203	0.0194632	-1.86083
3	0.973662	5.6107e-005	-1.84995
4	0.973692	4.98195e-010	-1.84991

Akar terletak di $x = 0.973692$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	2	-0.382973	1.37827
1	2.27787	0.0774688	1.84452
2	2.23587	0.000671812	1.81025
3	2.23549	6.74538e-008	1.80989

Akar terletak di $x = 2.23549$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	3.5	0.859593	-1.38947
1	4.11865	-0.307004	-1.90559
2	3.95754	0.0145632	-2.05279
3	3.96464	7.5622e-006	-2.05059

Akar terletak di $x = 3.96464$

- Hasil dari penyelesaian persamaan:

$$x * \exp(-x) + \cos(2x) = 0 \text{ pada range } [0,5]$$

METODE NEWTON RAPHSON :: DENGAN MODIFIKASI TABEL

Algoritma Metode Newton Raphson dengan modifikasi tabel :

1. Definisikan fungsi $F(x)$
2. ambil range nilai $x = [a, b]$ dengan jumlah pembagi n
3. Masukkan toleransi error (e) dan masukkan iterasi n
4. Gunakan algoritma tabel diperoleh titik pendekatan awal x_0 dari :
 $F(x_k) \cdot F(x_{k+1}) < 0$ maka $x_0 = x_k$
5. Hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
6. Bila $F^1(x_0) < e$ maka pendekatan awal x_0 digeser sebesar dx (dimasukkan)

$$x_0 = x_0 + dx$$

hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$

7. Untuk iterasi $I = 1$ s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$

$$x_1 = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F^1(x_{i-1})}$$

hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_i)$

bila $|F^1(x_i)| < e$ maka

$$x_i = x_i + dx$$

hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_0)$

8. Akar persamaan adalah x terakhir yang diperoleh.

METODE NEWTON RAPHSON :: DENGAN MODIFIKASI TABEL :: CONTOH

- Hitunglah akar dengan metode Newthton Raphson. Gunakan $e=0.00001$. Tebakan awal akar $x_0 = 1$

$$f(x) = e^x - 5x^2$$

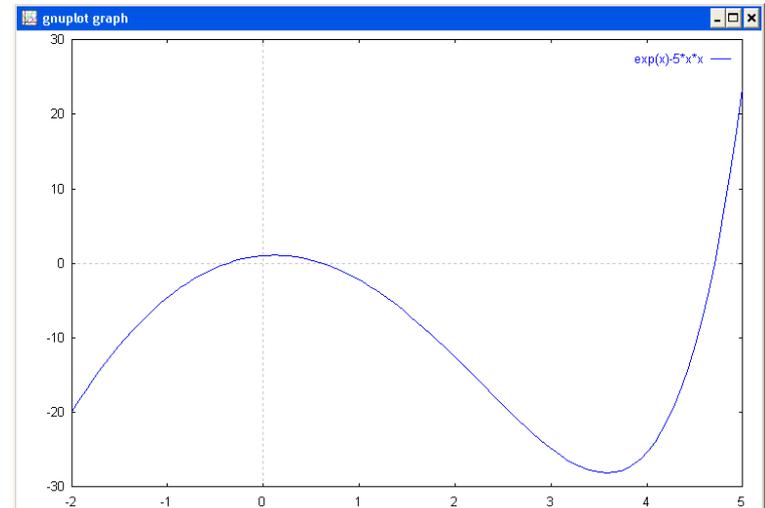
- Penyelesaian

$$f(x) = e^x - 5x^2 \quad f'(x) = e^x - 10x \quad x_{r+1} = x_r - \frac{e^x - 5x^2}{e^x - 10x}$$

Prosedur iterasi Newthton Raphson

0	1	-2.28172
1	0.686651	-0.370399
2	0.610741	-0.0232286
3	0.605296	-0.000121011
4	0.605267	-3.35649e-009

Akar terletak di $x = 0.605267$

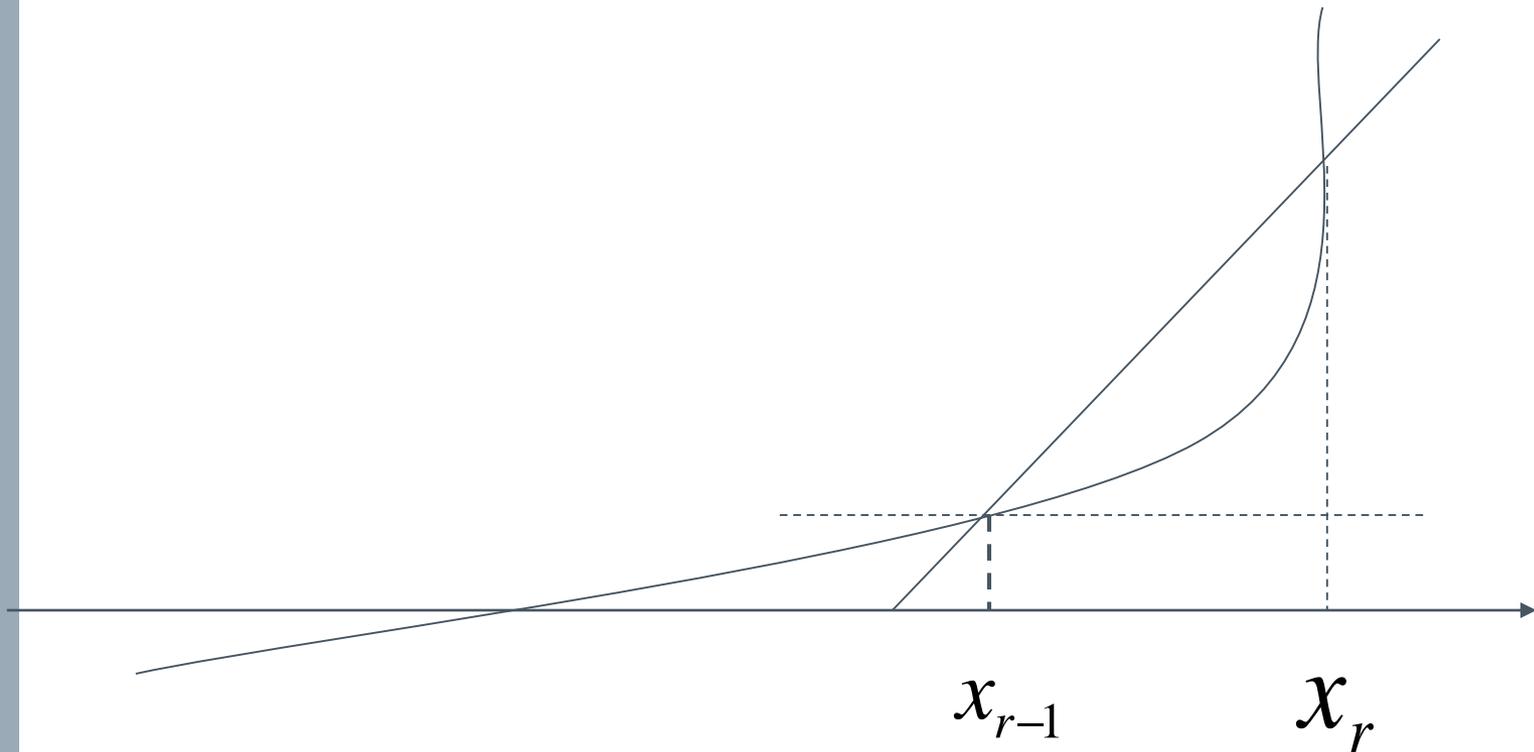


METODE SECANT :: PRINSIP

- Metode Newton Raphson memerlukan perhitungan turunan fungsi $f'(x)$.
- Tidak semua fungsi mudah dicari turunannya terutama fungsi yang bentuknya rumit.
- Turunan fungsi dapat dihilangkan dengan cara menggantinya dengan bentuk lain yang ekuivalen
- Modifikasi metode Newton Raphson dinamakan metode Secant.

π

METODE SECANT :: PRINSIP



METODE SECANT :: PRINSIP

$$f'(x) = \frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}$$

› Metode Newton-Raphson

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$$

METODE SECANT :: PRINSIP

- Definisikan fungsi $F(x)$
- Definisikan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
- Masukkan dua nilai pendekatan awal yang di antaranya terdapat akar yaitu x_0 dan x_1 , sebaiknya gunakan metode tabel atau grafis untuk menjamin titik pendekatannya adalah titik pendekatan yang konvergensinya pada akar persamaan yang diharapkan.
- Hitung $F(x_0)$ dan $F(x_1)$ sebagai y_0 dan y_1
- Untuk iterasi $I = 1$ s/d n atau $|F(x_i)|$

$$x_{i+1} = x_i - y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

Hitung $y_{i+1} = F(x_{i+1})$

- Akar persamaan adalah nilai x yang terakhir.

METODE SECANT :: CONTOH

- Penyelesaian dari $x^2 - (x + 1) e^{-x} = 0$?

ambil $x_0 = 0,8$ dan $x_1 = 0,9$ maka dapat dihitung

$$y_0 = F(x_0) = -0,16879$$

$$y_1 = F(x_1) = 0,037518$$

Iterasi Metode Secant adalah sebagai berikut :

$$\text{Iterasi 1 : } x_2 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 0,881815$$

$$y_2 = 0,00153$$

$$\text{Iterasi 2 : } x_3 = x_2 - y_2 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0,882528$$

$$y_3 = 1,3 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Iterasi 3 : } x_4 = x_3 - y_3 \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = 0,882534$$

$$y_4 = 4,91 \cdot e^{-9}$$

Diperoleh akar $x = 0,882534$

CONTOH KASUS PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

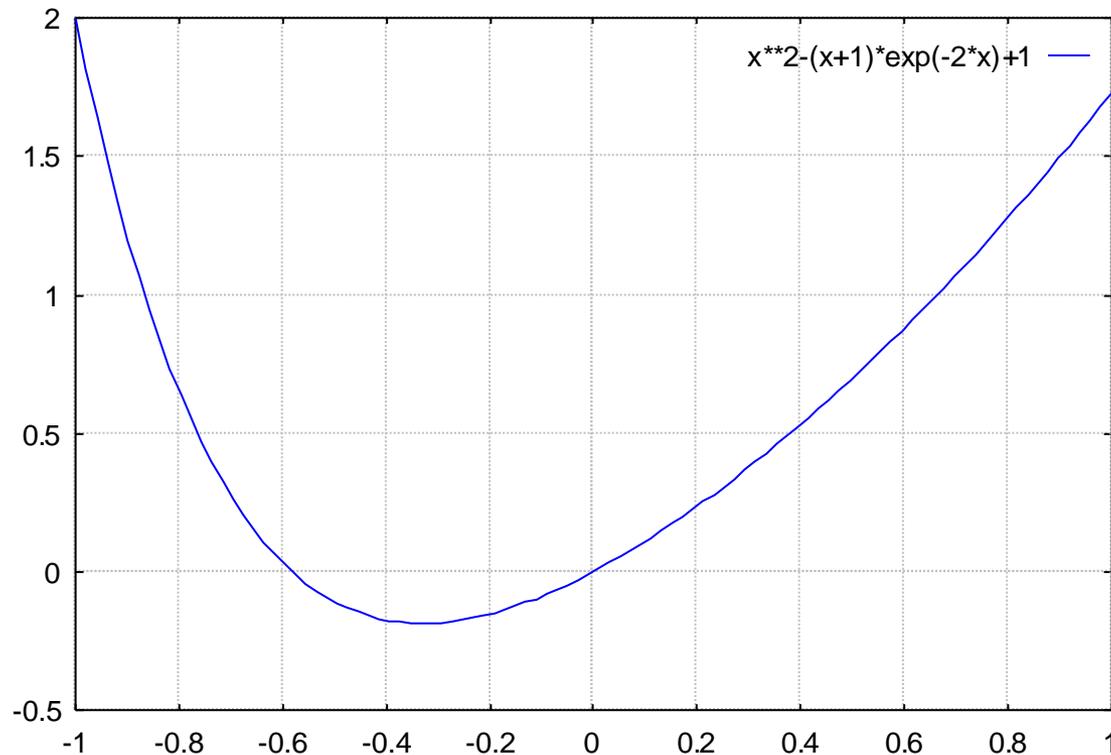
- Penentuan nilai maksimal dan minimal fungsi non linier
- Perhitungan nilai konstanta pada matrik dan determinan, yang biasanya muncul dalam permasalahan sistem linier, bisa digunakan untuk menghitung nilai eigen
- Penentuan titik potong beberapa fungsi non linier, yang banyak digunakan untuk keperluan perhitungan-perhitungan secara grafis.

PENENTUAN NILAI MAKSIMAL DAN MINIMAL FUNGSI NON LINIER

- nilai maksimal dan minimal dari $f(x)$ \rightarrow memenuhi $f'(x)=0$.
- $g(x)=f'(x)$ \rightarrow $g(x)=0$
- Menentukan nilai maksimal atau minimal $\rightarrow f''(x)$

CONTOH SOAL

- Tentukan nilai minimal dari $f(x) = x^2 - (x+1)e^{-2x} + 1$



Nilai minimal terletak antara -0.4 dan -0.2

CONTOH SOAL

Untuk menentukan nilai minimal terlebih dahulu dihitung $g(x)=f'(x)$

$$g(x) = 2x - e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} = 2x + (2x+1)e^{-2x}$$

Jadi permasalahannya menjadi menyelesaikan persamaan :

$$2x + (2x+1)e^{-2x} = 0$$

Dengan menggunakan metode Secant diperoleh :

Pendekatan awal di $x_0=-0.4$ dan $x_1=-0.2$

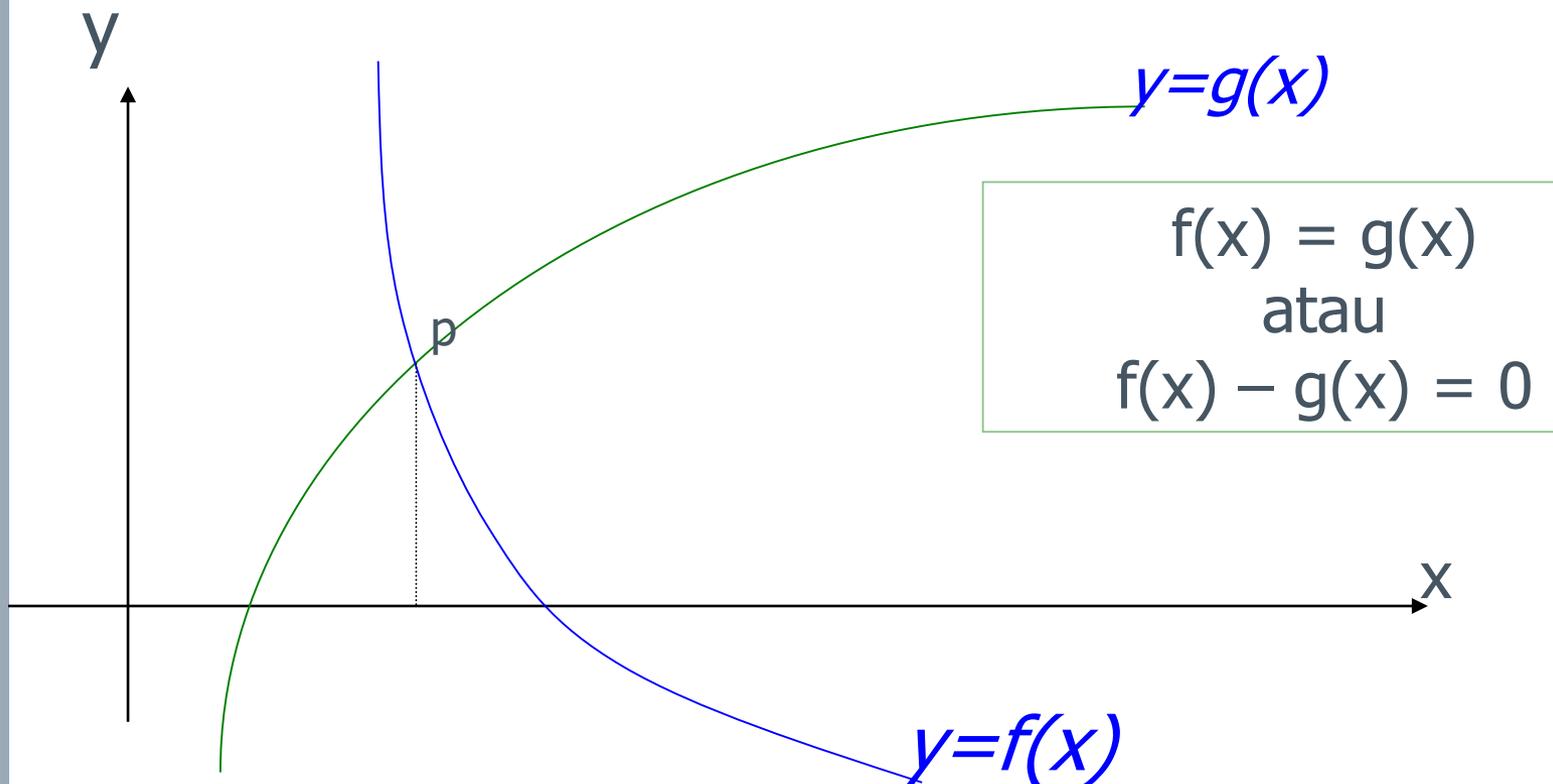
Toleransi error = $1e-005$

Iterasi	x	f(x)
1	-0.316495	0.0581765
2	-0.332006	-0.0113328
3	-0.329477	0.000208218
4	-0.329523	7.28621e-007

Akar persamaan di $x = -0.329523$

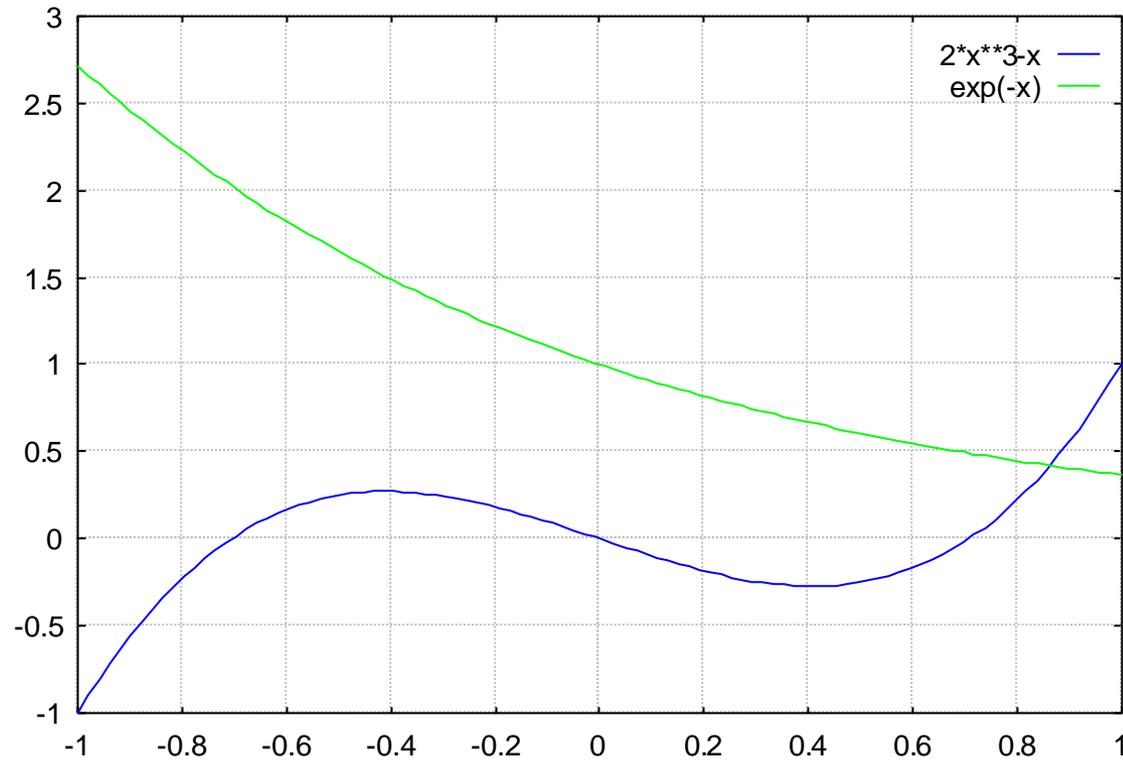
Jadi nilai minimal fungsi $f(x)$ terletak di $x=-0.329523$

MENGHITUNG TITIK POTONG 2 BUAH KURVA



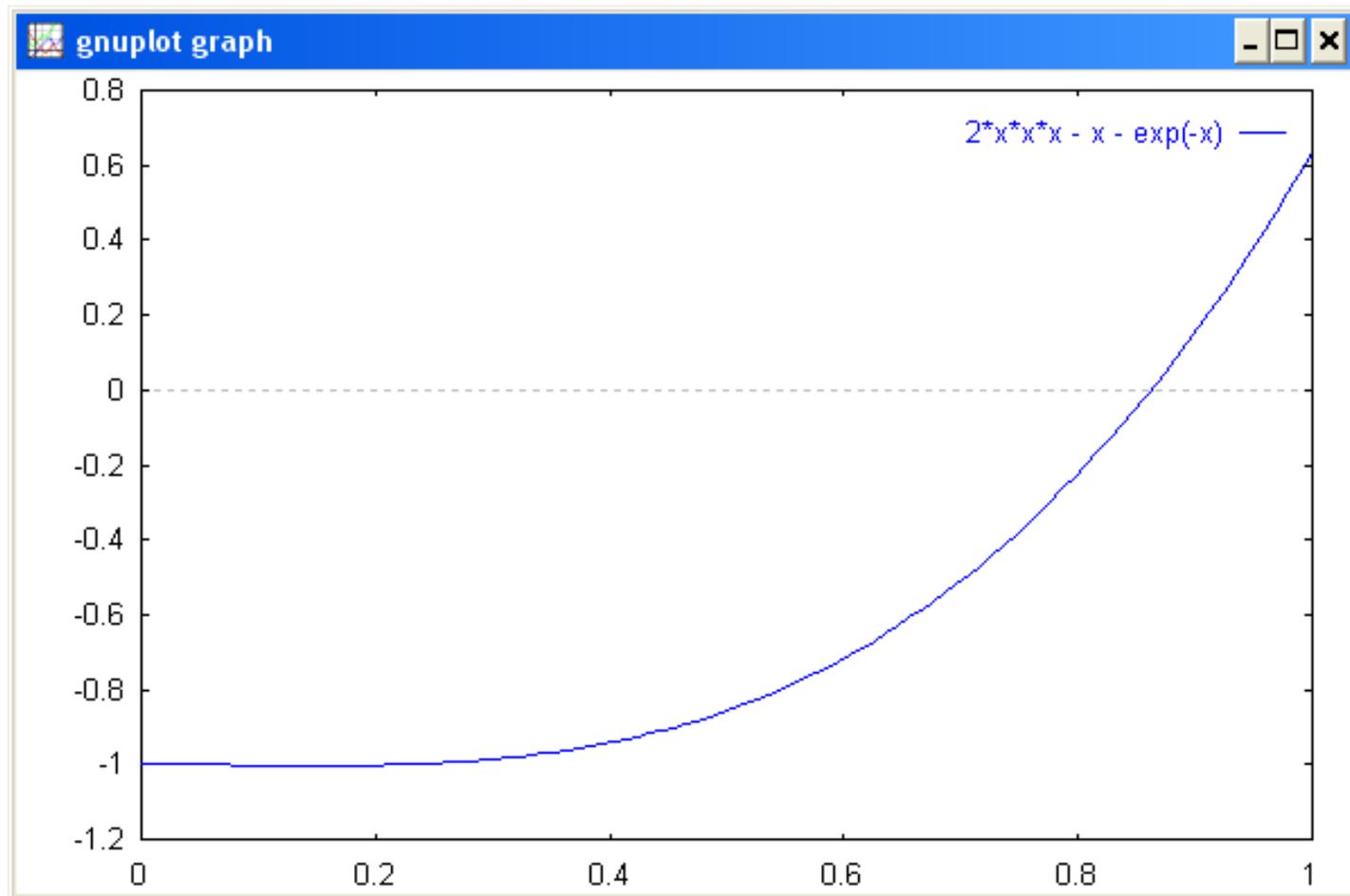
CONTOH SOAL

- › Tentukan titik potong $y=2x^3-x$ dan $y=e^{-x}$



Akar terletak di antara 0.8 dan 1

CONTOH SOAL



SOAL-SOAL

- Tahun 1225 Leonardo da Pisa mencari akar persamaan:
$$F(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$
dan menemukan $x = 1.368808107$.
- Tidak seorangpun yang mengetahui cara Leonardo menemukan nilai ini. Sekarang rahasia ini dapat dipecahkan dengan metode iterasi sederhana.
- Carilah salah satu dari kemungkinan $x = g(x)$. Lalu dengan memberikan sembarang input awal, tentukan $x=g(x)$ yang mana yang menghasilkan akar persamaan yang ditemukan Leonardo itu.

SOAL-SOAL

- Hitung akar 27 dan akar 50 dengan biseksi dan regula falsi! Bandingkan ke dua metode tersebut! Mana yang lebih cepat ? Catat hasil uji coba

a	b	N	e	Iterasi Biseksi	Iterasi Regula Falsi
			0.1		
			0.01		
			0.001		
			0.0001		

- Tentukan nilai puncak pada kurva $y = x^2 + e^{-2x}\sin(x)$ pada range $x=[0,10]$ dengan metode newthon raphson