# INTERPOLASI

3SKS-TEKNIK INFORMATIKA-S1

MOHAMAD SIDIQ

PERTEMUAN : 11-12

# MATERI PERKULIAHAN

| SEBELUM-UTS | SETELAH-UTS |
|---|---|
| ▪ Pengantar Metode Numerik<br>▪ Sistem Bilangan dan Kesalahan<br>  ▪ Penyajian Bilangan Bulat & Pecahan<br>  ▪ Nilai Signifikan<br>  ▪ Akurasi dan Presisi<br>  ▪ Pendekatan dan Kesalahan<br>▪ Penyelesaian Persamaan Non Linier<br>  ▪ Metode Tabel<br>  ▪ Metode Biseksi<br>  ▪ Metode Regula Falsi<br>▪ Penyelesaian Persamaan Non Linier (Lanjutan)<br>  ▪ Metode Iterasi Sederhana<br>  ▪ Metode Newton Raphson<br>  ▪ Metode Secant<br>▪ Penyelesaian Persamaan Simultan<br>  ▪ Metode Eliminasi Gauss<br>  ▪ Metode Gauss Jordan<br>▪ Penyelesaian Persamaan Simultan (Lanjutan)<br>  ▪ Metode Gauss Seidel<br>  ▪ Studi Kasus | ▪ Diferensi Numerik<br>  ▪ Selisih Maju<br>  ▪ Selisih Mundur<br>  ▪ Selisih Tengah<br>  ▪ Diferensi Tingkat Tinggi<br>▪ Integrasi Numerik<br>  ▪ Metode Reimann<br>  ▪ Metode Trapezoida<br>  ▪ Metode Simpson<br>▪ Integrasi Numerik (Lanjutan)<br>  ▪ Metode Gauss<br>  ▪ Studi Kasus<br>▪ Interpolasi<br>  ▪ Metode Linier<br>  ▪ Metode Kuadrat<br>▪ Interpolasi (Lanjutan)<br>  ▪ Metode Polinomial<br>  ▪ Metode Lagrange<br>▪ Regresi<br>  ▪ Linier<br>  ▪ Eksponensial<br>  ▪ Polinomial<br>▪ Tugas Akhir Semester |

# INTERPOLASI

- **Interpolasi adalah teknik mencari harga suatu fungsi pada suatu titik diantara 2 titik yang nilai fungsi pada ke-2 titik tersebut sudah diketahui**
- **Cara menentukan harga fungsi f dititik $x^* \varepsilon [x_0,x_n]$ dengan menggunakan informasi dari seluruh atau sebagian titik-titik yang diketahui ( $x_0$, $x_1$, …., $x_n$)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | ……. | $x_n$ |
| f(x) | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | ……. | $f(x_n)$ |

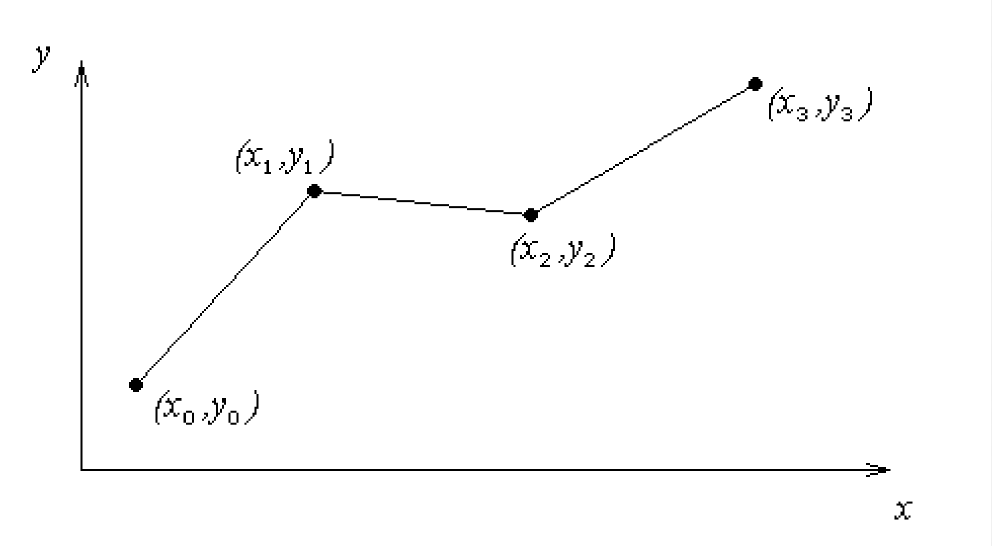
# TEKNIK UMUM YANG DIGUNAKAN

(i) **Membentuk polinomial berderajat ≤ n yg mempunyai harga fungsi di titik-titik yang diketahui → Polinomial Interpolasi**

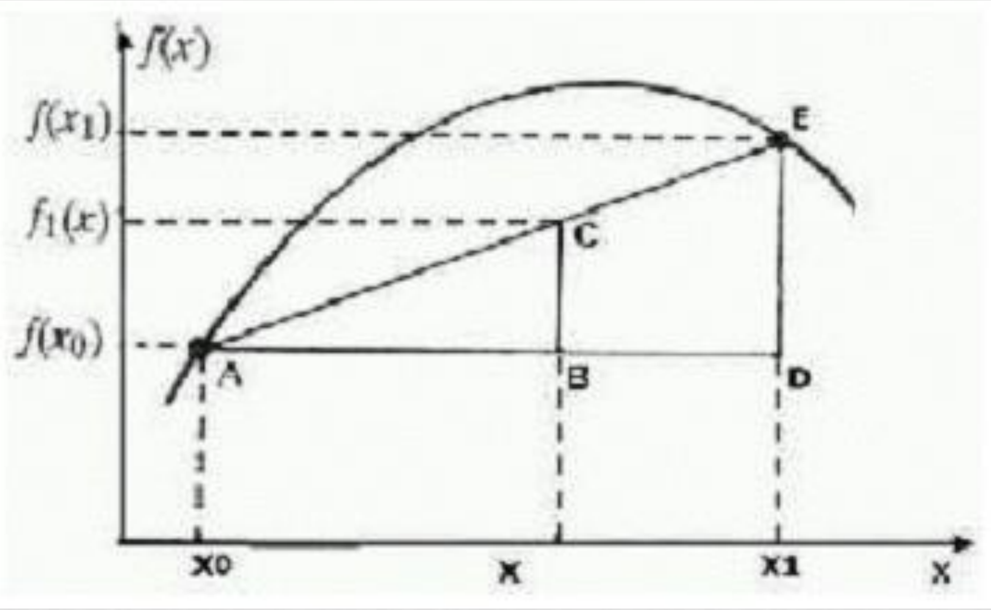
(ii) **Masukkan titik yang ingin dicari harga fungsinya ke dalam polinomial interpolasi**

# INTERPOLASI LINIER

- ide dasar : pada saat data dalam bentuk tabel tidak begitu bervariasi, sehingga memungkinkan untuk dilakukan pendekatan dengan menggunakan sebuah garis lurus di antara dua titik yang berdekatan.



# INTERPOLASI LINIER




$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

atau $\boxed{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}$

sehingga $\boxed{f_1(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}.(x - x_0)}$

# CONTOH :

- **Jarak yang dibutuhkan sebuah kendaraan untuk berhenti adalah fungsi kecepatan. Data percobaan berikut ini menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak yang dibutuhkan untuk menghentikan kendaraan.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kecepatan (mil/jam) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
| Jarak henti (feet) | 12 | 21 | 46 | 65 | 90 | 111 | 148 |

- **Perkirakan jarak henti yang dibutuhkan bagi sebuah kenderaan yang melaju dengan kecepatan 45 mil/jam.**

# CONTOH :

- **maka untuk mencari nilai x=45 maka**,

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{90 - 65}{50 - 40}(45 - 40)$$

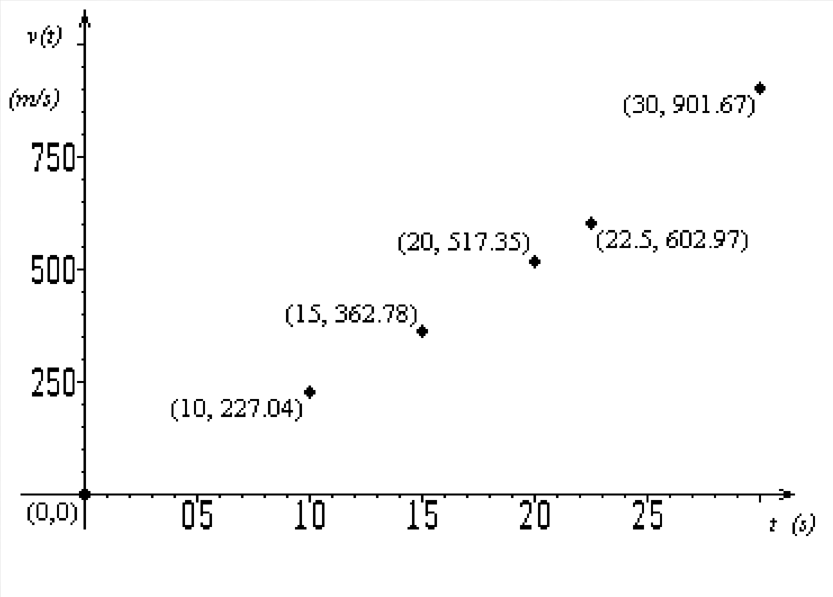
$$f_1(45) = 65 + \frac{25}{10}(5) = 65 + 12.5 = 77.5 \text{ feet}$$

# CONTOH

Kecepatan ke atas roket diberikan sebagai fungsi waktu pada di bawah. Cari kecepatan pada t = 16 detik menggunakan splines linear.

| t | v(t) |
|---|---|
| s | m/s |
| 0 | 0 |
| 10 | 227.04 |
| 15 | 362.78 |
| 20 | 517.35 |
| 22.5 | 602.97 |
| 30 | 901.67 |

Tabel: Kecepatan sebagai fungsi dari waktu.




Gambar: kecepatan VS waktu data misalnya roket.

# INTERPOLASI LINIER

$$t_0 = 15, \qquad v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20, \qquad v(t_1) = 517.35$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

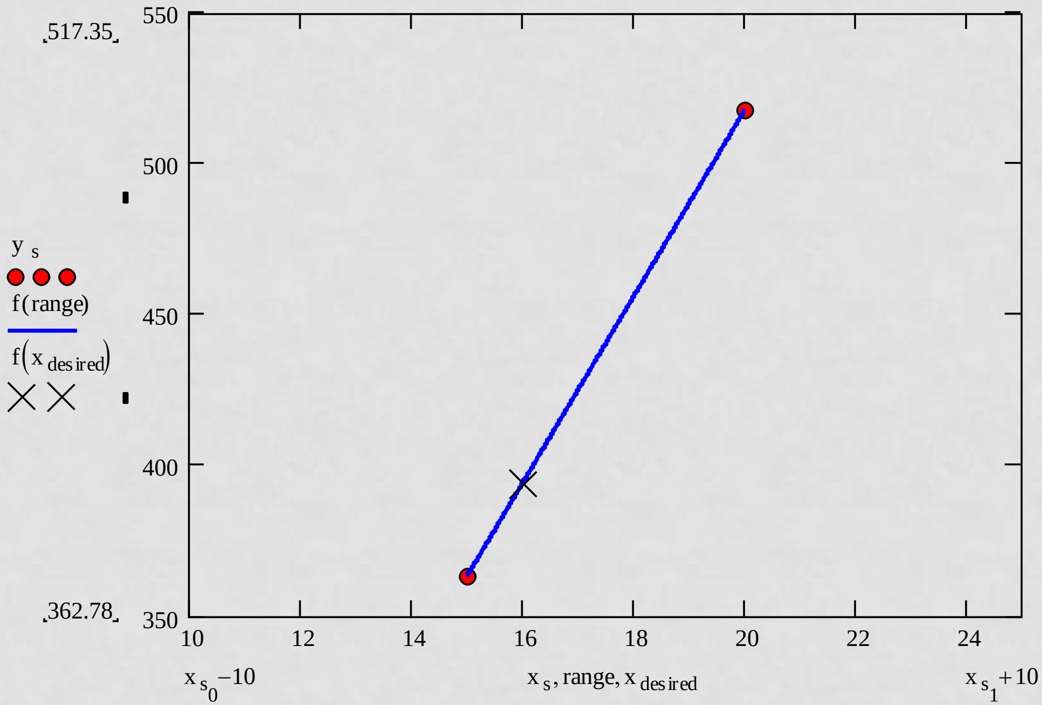
$$= 362.78 + \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15}(t - 15)$$

$$v(t) = 362.78 + 30.913(t - 15)$$

At $t = 16,$

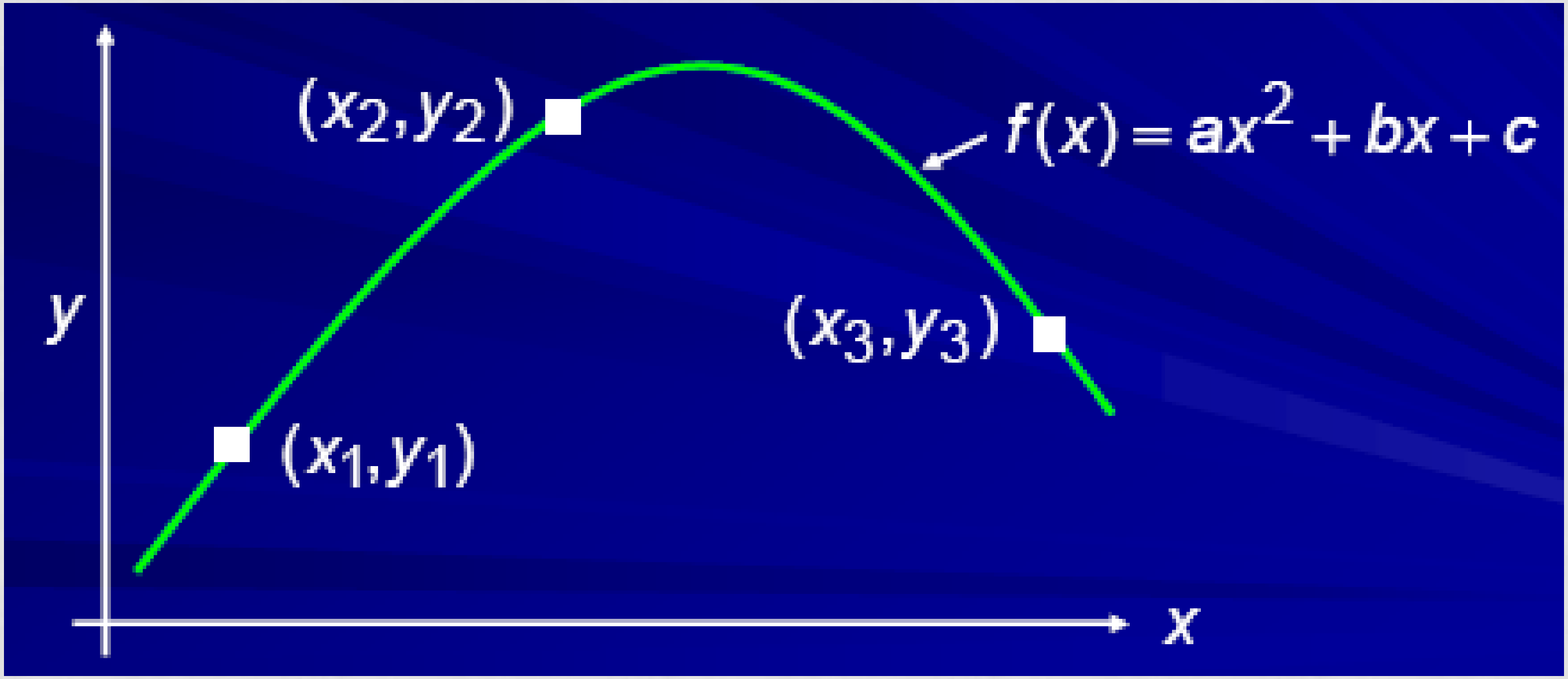
$$v(16) = 362.78 + 30.913(16 - 15)$$

$$= 393.7 \text{ m/s}$$



# INTERPOLASI KUADRAT

$F(x) = ax^2 + bx + c$



# INTERPOLASI KUADRAT

- Titik-titik data $(x_1,y_1)$ $(x_2,y_2)$ $(x_3,y_3)$

$$
\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\
ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\
ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3
\end{aligned}
$$

- Hitung a, b dan c dari sistem persamaan tersebut dengan Metode Eliminasi Gauss

# CONTOH :

- Diberikan titik ln(8) = 2.0794, ln(9) = 2.1972, ln(9.5) = 2.2513. Tentukan nilai ln(9.2) dengan interpolasi kuadrat
- Penyelesaian:
- Sistem Pers Linier yang terbentuk.
  - $64a + 8b + c = 2.0794$
  - $81a + 9b + c = 2.1972$
  - $90.25a + 9.5b + c = 2.2513$
- Penyelesaian a= -0.0064 b = 0.2266

  c = 0.6762
- Sehingga p2(9.2) = 2.2192

# POLINOM NEWTON

- Persamaan Polinom Linier

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

- Bentuk pers ini dapat ditulis :

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

- Yang dalam hal ini $a_0 = y_0 = f(x_0)$ (1)
- Dan (2)

$$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

- Pers ini mrpk bentuk selish terbagi (divided-difference)

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

# POLINOM NEWTON

- Polinom kuadratik

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Atau

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Dari pers ini menunjukkan bahwa $p_2(x)$ dapat dibentuk dari pers sebelumnya $p_1(x)$. Nilai $a_2$ dapat ditemukan dengan mengganti $x=x_2$ untuk mendapatkan (3)

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- Nilai $a_0$ dan $a_1$ pada pers 1 dan 2 dimasukkan pada pers 3

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

# POLINOM NEWTON

- Dengan melakukan utak-atik aljabar, pers ini lebih disukai

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

# POLINOM NEWTON

- Jadi tahapan pembentukan polinom Newton :

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

# POLINOM NEWTON

- Nilai konstanta $a_0$, $a_1$, $a_2$,…, $a_n$, merupakan nilai selisih terbagi , dg nilai

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f[x_1, x_0]$$
$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$
$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

- Yang dalam hal ini

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0)}{x_n - x_0}$$

# POLINOM NEWTON

- Dengan demikian polinom Newton dapat ditulis dalam hub rekursif sebagai :
  - Rekurens

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

  - basis $p_0(x) = f(x_0)$
- Atau dalam bentuk polinom yang lengkap sbb :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

# CONTOH SOAL :

- Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri f(x)=cos(x) dalam range[0.0, 4] dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu taksirlah f(x) dengan x=2.5 dengan Polinom Newton derajat 3.

| $x_i$ | $y_i$ | ST-1 | ST-2 | ST-3 | ST-4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1 | -0.4597 | -0.2484 | 0.1466 | -0.0147 |
| 1.0 | 0.5403 | -0.9564 | 0.1913 | 0.0880 | |
| 2.0 | -0.4161 | -0.5739 | 0.4551 | | |
| 3.0 | -0.99 | 0.3363 | | | |
| 4.0 | -0.6536 | | | | |

# CONTOH SOAL :

- Contoh cara menghitung nilai selisih terbagi pada tabel :

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0.5403 - 1}{1 - 0} = -0.4597$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{-0.4161 - 0.5403}{2 - 1} = -0.9564$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)} = \frac{-0.9564 + 0.4597}{2 - 0} = -0.2484$$

# CONTOH SOAL :

- Maka polinom Newton derajat 1,2 dan 3 dengan $x_0 = 0$ sebagai titik pertama :

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0)$$

$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0)$$

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) +$$
$$0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)$$

$$\cos(x) \approx p_4(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) +$$
$$0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0) - 0.0147(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0)$$

- Nilai sejati f(2.5) adalah
  - F(2.5) = cos(2.5)=-0.8011