MATEMATIKA TEKNIK 1

3 SKS

TEKNIK ELEKTRO

UDINUS

BAB II

FUNGSI LIMIT DAN KEKONTINUAN

Sebelum dibahas mengenai fungsi kompleks, maka perlu dipelajari konsep-konsep topologi yang akan digunakan pada fungsi kompleks.

Konsep-Konsep Topologi Pada Fungsi Kompleks

Himpunan pada pembahasan ini adalah koleksi atau kumpulan titik-titik pada bidang Z. Dianggap anda telah memahami operasi pada himpunan yaitu gabungan, irisan, penjumlahan dan pengurangan beserta sifat-sifatnya.

1. Lingkungan/persekitaran

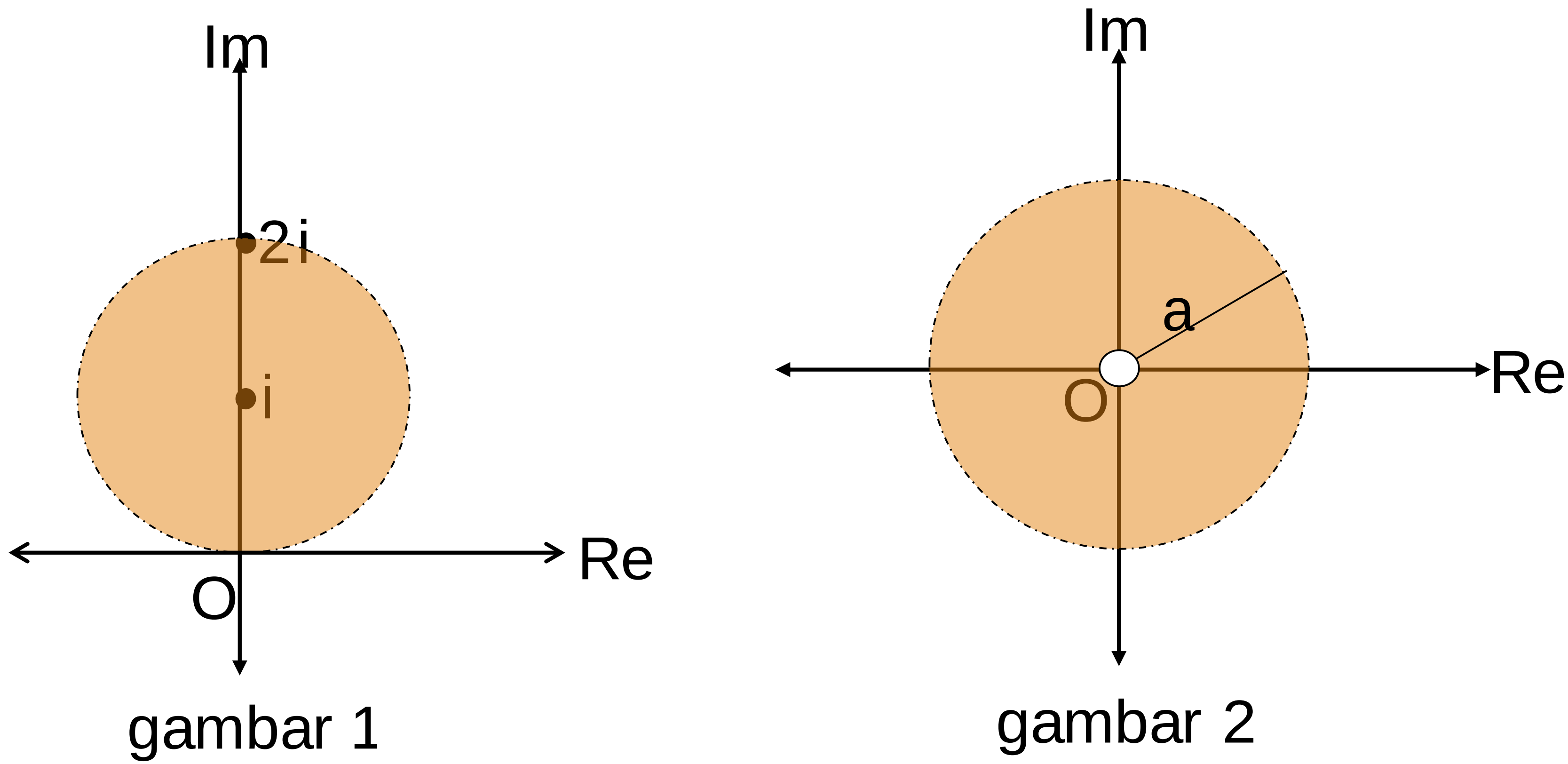
a. Persekitaran z_o adalah himpunan semua titik z yang terletak di dalam lingkaran yang berpusat di z_o, berjari-jari r, $r > 0$. Ditulis $N(z_o,r)$ atau $|z - z_o| < r$.

b. Persekitaran tanpa z_o adalah himpunan semua titik $z \neq z_o$ yang terletak di dalam lingkaran yang berpusat di z_o, berjari-jari r, $r > 0$. Ditulis $N^*(z_o,r)$ atau $0 < |z - z_o| < r$.

Contoh :

a. N(i,1) atau $|z - i| < 1$, lihat pada gambar 1

b. N*(O,a) atau $0 < |z - O| < a$, lihat pada gambar 2



2. Komplemen

Andaikan S suatu himpunan. Komplemen dari S ditulis S^c,merupakan himpunan semua titik pada bidang Z yang tidak termasuk di S.

Contoh :

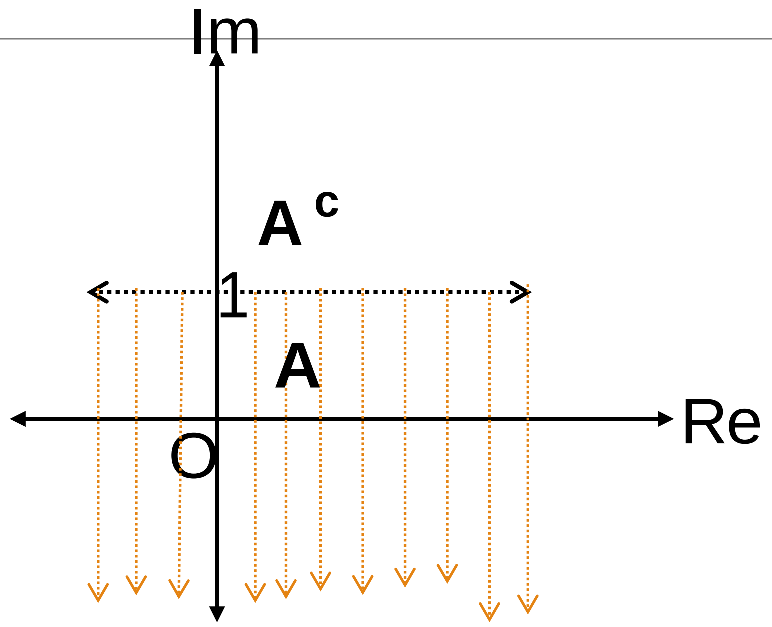
Gambarkan !

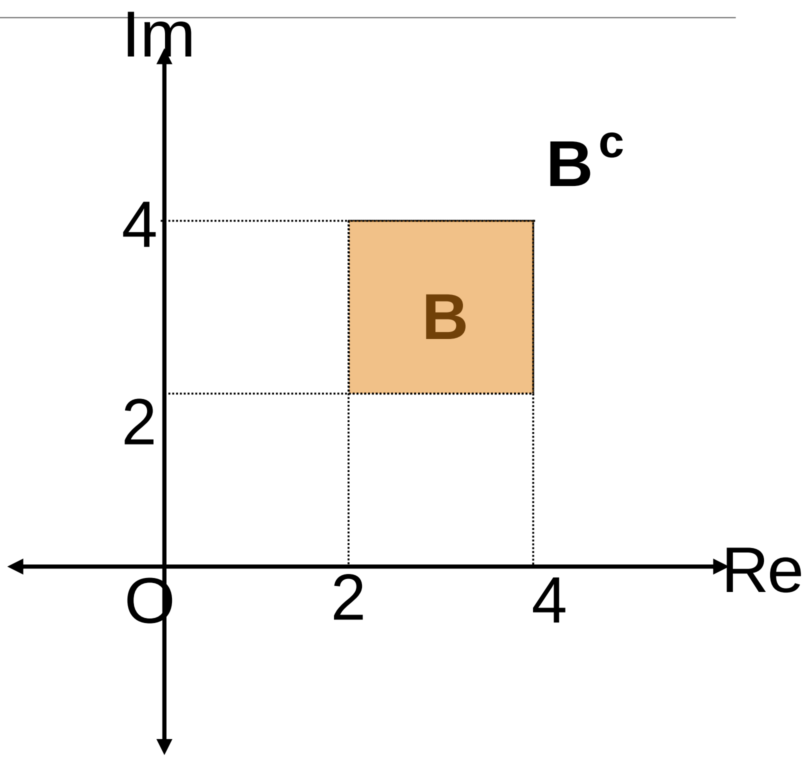
A = { z | Im z< 1}, maka A^c = { z | Im z≥ 1}.

B ={ z | 2<z<4}, maka B^c = { z | z≤2 atau z≥4}.

$A = \{ z \mid \text{Im } z < 1\}$, maka $A^c = \{ z \mid \text{Im } z \geq 1\}$.

$B = \{ z \mid 2 < z < 4\}$, maka $B^c = \{ z \mid z \leq 2 \text{ atau } z \geq 4\}$.





3. Titik limit

Titik z_o disebut titik limit dari himpunan S jika untuk setiap $N^*(z_o,\delta)$ maka $N^*(z_o,\delta) \cap S \neq \phi$. Jika $z_o \in S$ dan z_o bukan titik limit, maka z_o disebut titik terasing.

4. Titik batas

Titik z_o disebut titik batas dari himpunan S jika untuk setiap $N^*(z_o,\delta)$ memuat suatu titik di S dan memuat suatu titik yang tidak di S.

5. Batas dari himpunan S

adalah himpunan semua titik batas dari S.

6. Interior dan Eksterior

Titik z_o disebut interior dari himpunan S jika ada $N(z_o,\delta)$ sehingga $N(z_o,\delta) \subset S$. Titik yang bukan titik interior atau bukan titik batas disebut titik eksterior.

7. Himpunan Terbuka

Himpunan S disebut himpunan terbuka jika semua anggota S adalah titik interior S.

8. Himpunan Tertutup

Himpunan S disebut himpunan tertutup jika S memuat semua titik limitnya.

9. Himpunan Terhubung

Himpunan terbuka S disebut terhubung, jika setiap dua titik di S dapat dihubungkan oleh penggal garis yang seluruhnya terletak di S.

10. Daerah domain

Himpunan terbuka S yang terhubung disebut daerah domain.

11. Daerah Tertutup

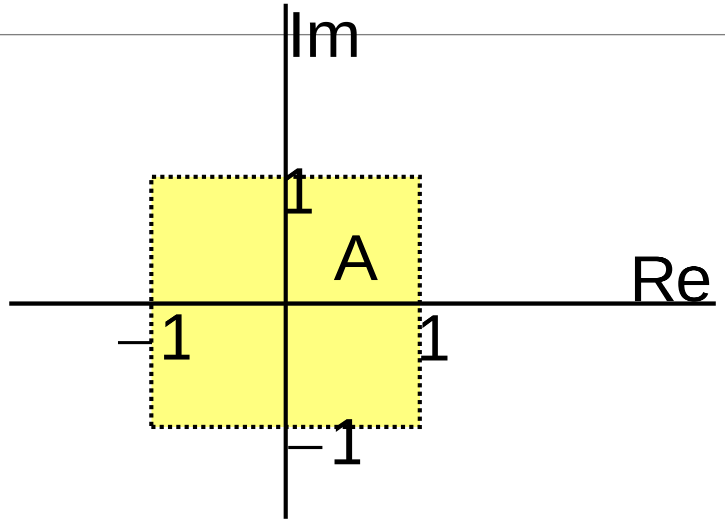
Daerah tertutup S adalah daerah terbuka digabung dengan batasnya.

12. Penutup dari himpunan S

adalah himpunan S digabung dengan titik limitnya.

Contoh :

1. Diberikan $A = \{ z / |z|<1\}$, maka:

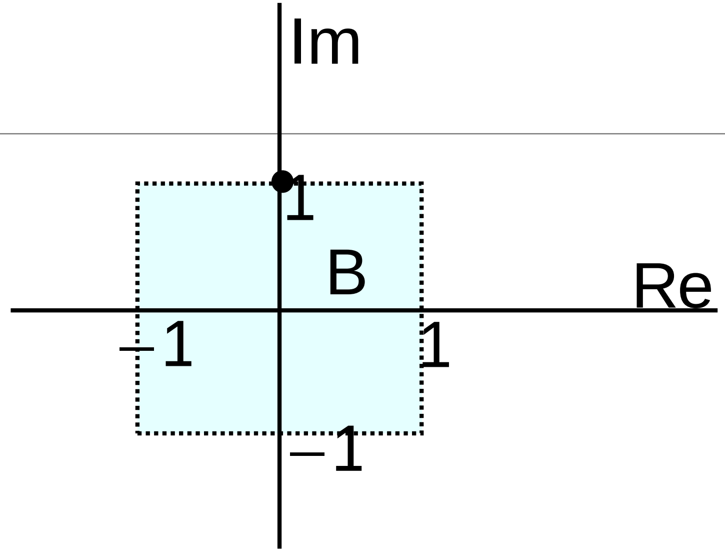


A adalah himpunan terbuka dan terhubung.

Batas dari A adalah $\{ z / |z|=1\}$.

Penutup dari A adalah $\{ z / |z|\leq 1\}$.

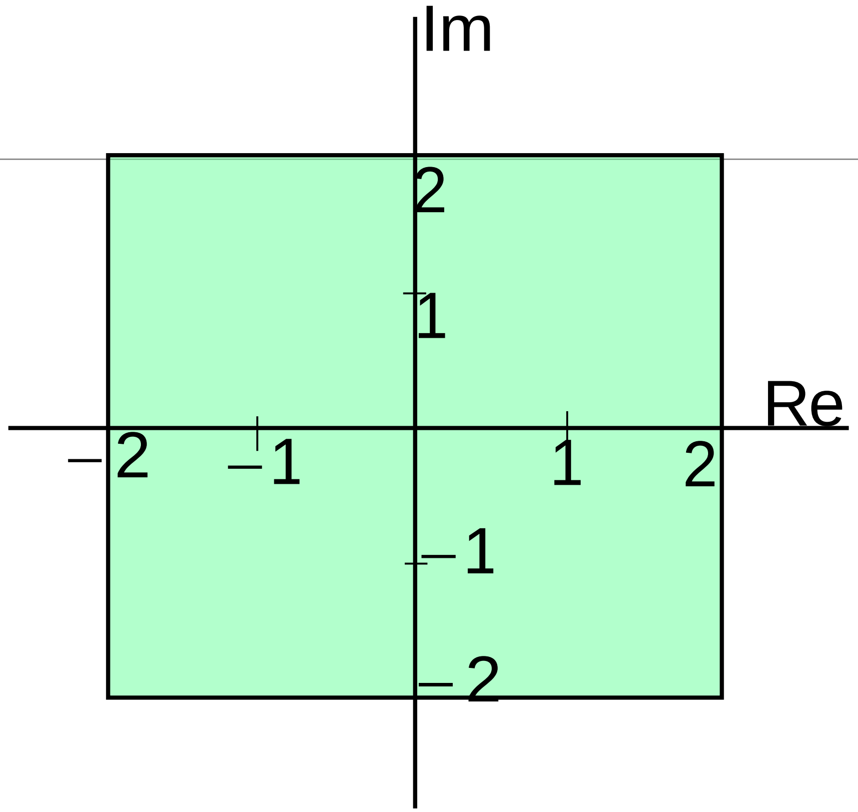
2. Diberikan B = { z / |z|<1} U {(0,1)}, maka:



B adalah bukan himpunan terbuka dan juga bukan himpunan tertutup.

Titik-titik limit dari B adalah { z / |z|$\leq$1}.

3. Diberikan $C = \{ z / |z| \leq 2\}$, maka:



Titik-titik interior C adalah $\{ z / |z| < 2\}$.

Fungsi Kompleks

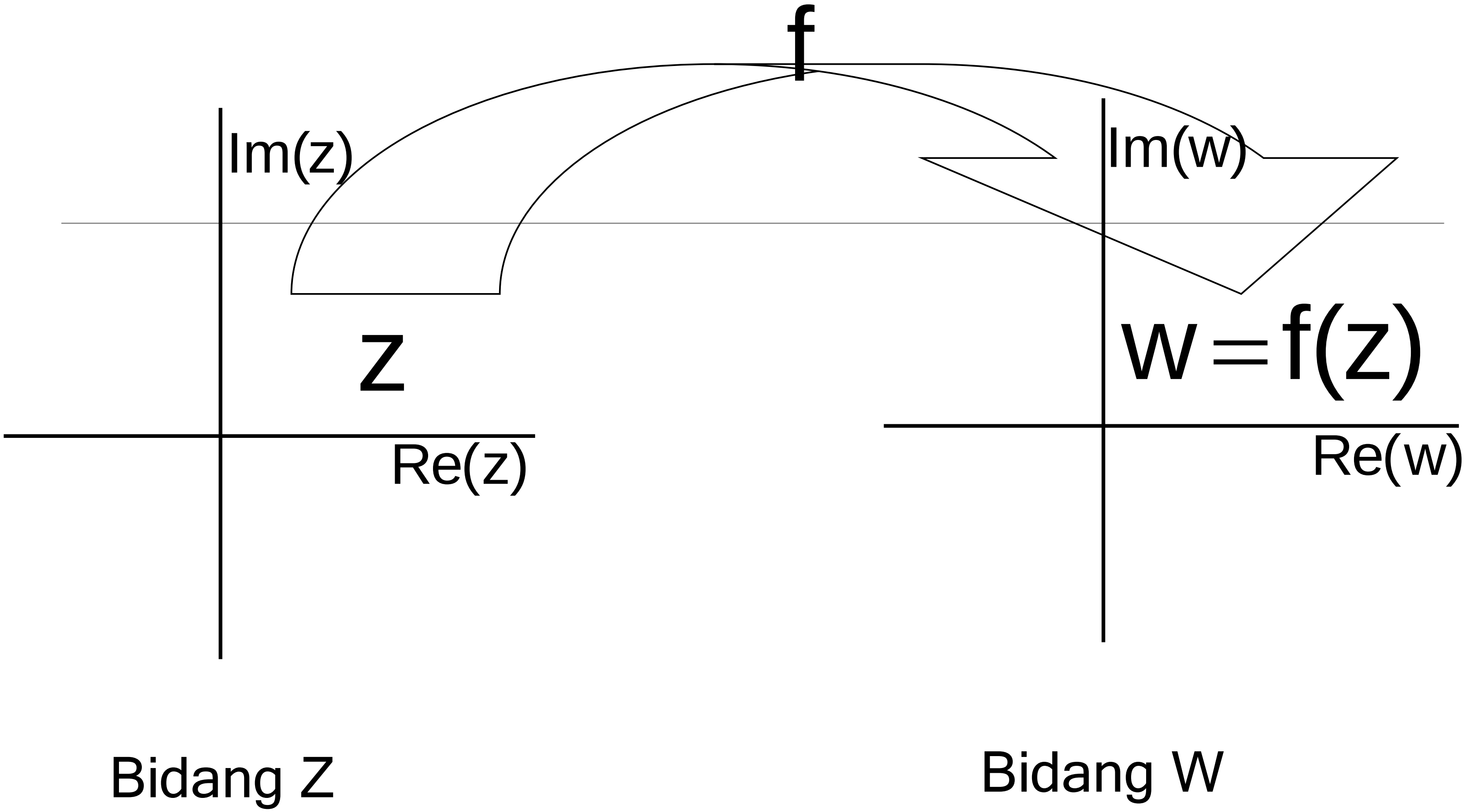
Definisi :

Misalkan D himpunan titik pada bidang Z.

Fungsi kompleks f adalah suatu aturan yang memasangkan setiap titik z anggota D dengan satu dan hanya satu titik w pada bidang W, yaitu (z,w).

Fungsi tersebut ditulis w = f(z).

Himpunan D disebut daerah asal (domain) dari f, ditulis D_f dan f(z) disebut nilai dari f atau peta dari z oleh f. Range atau daerah hasil (jelajah) dari f ditulis R_f , yaitu himpunan f(z) untuk setiap z anggota D.


f
Im(z)
z
Re(z)
Im(w)
w = f(z)
Re(w)
Bidang Z
Bidang W

Contoh :

a) $w = z + 1 - i$

b) $w = 4 + 2i$

c) $w = z^2 - 5z$

d) $f(z) = \dfrac{3 - z}{2z + 1}$

Contoh a,b,c adalah fungsi kompleks dengan domain semua titik pada bidang Z.

Contoh d adalah fungsi kompleks dengan domain semua titik pada bidang Z , kecuali $z = -\dfrac{1}{2}$

Jika $z = x + iy$, maka fungsi $w = f(z)$ dapat diuraikan menjadi $w = u(x,y) + iv(x,y)$ yang berarti $\mathrm{Re}(w)$ dan $\mathrm{Im}(w)$ masing-masing merupakan fungsi dengan dua variabel real x dan y.

Apabila $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka $w = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

Contoh :

Tuliskan $f(z) = 2z^2 - i$ dalam bentuk u dan v !

Jawab :

Misal $z = x + iy$,

maka fungsi $w = f(z) = 2z^2 - i$

$= 2(x + iy)^2 - i$

$= 2(x^2+2xyi-y^2) - i$

$= 2(x^2-y^2) + i(2xy-1)$.

Jadi $u = 2(x^2-y^2)$ dan $v = 2xy-1$.

Jika $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$.

Tentukan $f(z) = z^2 + i$

Jawab

$f(z) = z^2 + i$

$= [r (\cos\theta + i \sin\theta)]^2 + i$

$= r^2[\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta] + i$

$= r^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + r^2 i\sin 2\theta + i$

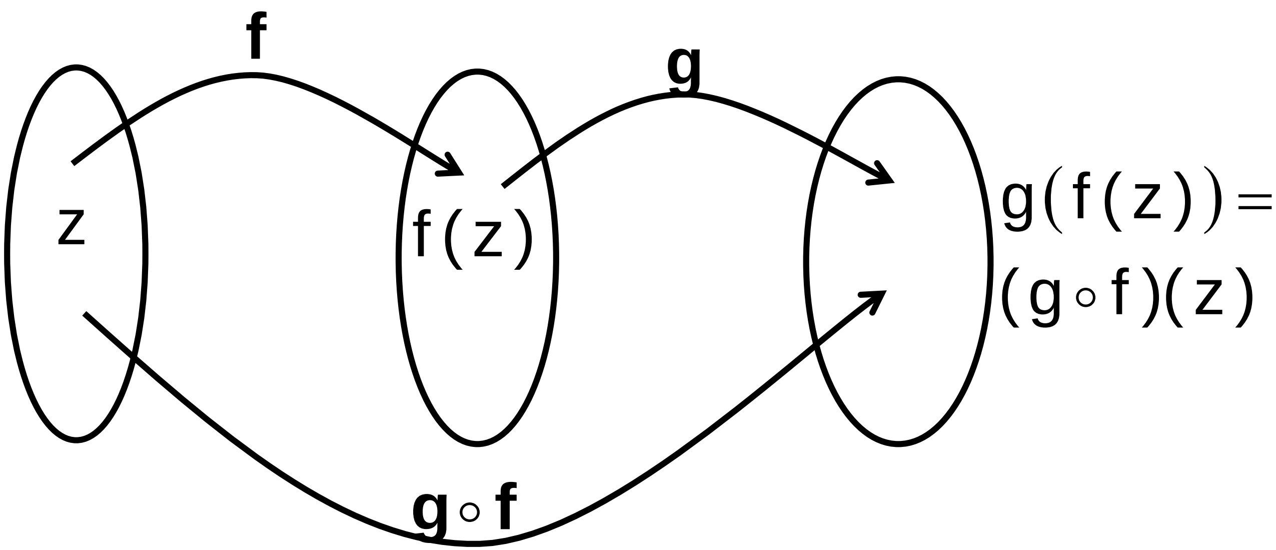
$= r^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) +(1+r^2\sin 2\theta)i$

berarti $u = r^2(\cos 2\theta - \sin^2\theta)$ dan $v = 1+r^2\sin 2\theta)$.

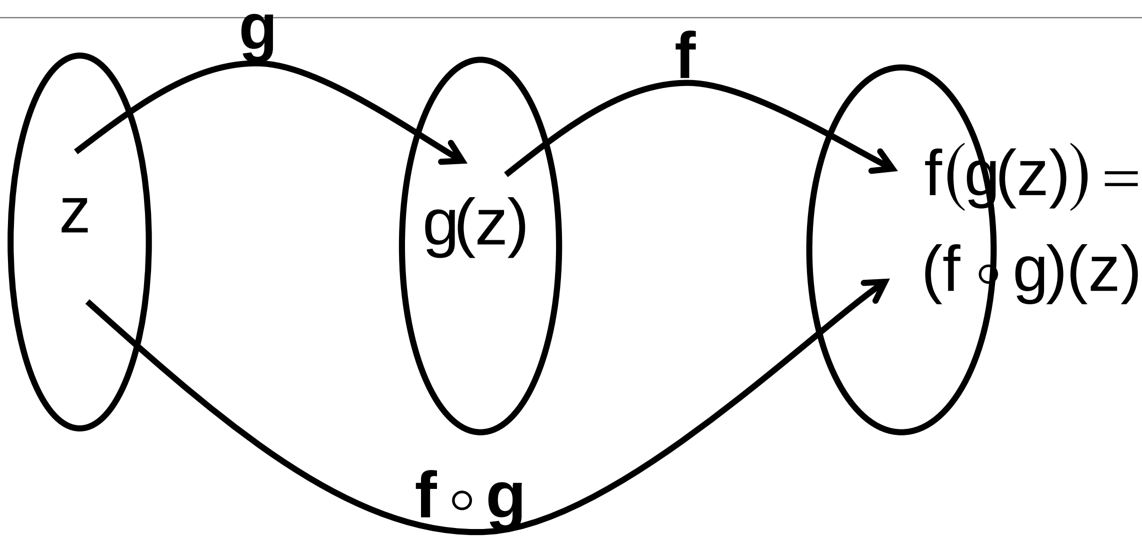
Komposisi Fungsi

Diberikan fungsi f(z) dengan domain D_f dan fungsi g(z) dengan domain D_g.

Jika $R_f \cap D_g \neq \phi$, maka ada fungsi komposisi $(g \circ f)(z) = g(f(z))$, dengan domain D_f.



Jika $R_g \cap D_f \neq \phi$, maka ada fungsi komposisi $(f \circ g)(z) = f(g(z))$, dengan domain D_g.



Tidak berlaku hukum komutatif pada $(g \circ f)(z)$ dan $(f \circ g)(z)$.

Contoh :

Misal: $f(z) = 3z - i$ dan $g(z) = z^2 + z - 1 + i$

- Jika $R_f \cap D_g \neq \phi$,

maka $(g \circ f)(z) = g(f(z))$

$= g(3z - i)$

$= (3z - i)^2 + (3z - i) - 1 + i$

$= 9z^2 - 6iz - 1 + 3z - i - 1 + i$

$= 9z^2 - 3z - 2 - 6iz$

Jika $R_g \cap D_f \neq \phi$,

maka $(f \circ g)(z) = f(g(z))$

$$= f(z^2 + z - 1 + i)$$

$$= 3z^2 + 3z - 3 + 3i - i$$

Karena $9z^2 - 3z - 2 - 6iz \neq 3z^2 + 3z - 3 + 3i - i$

Jadi $(g \circ f)(z) \neq (f \circ g)(z)$ atau

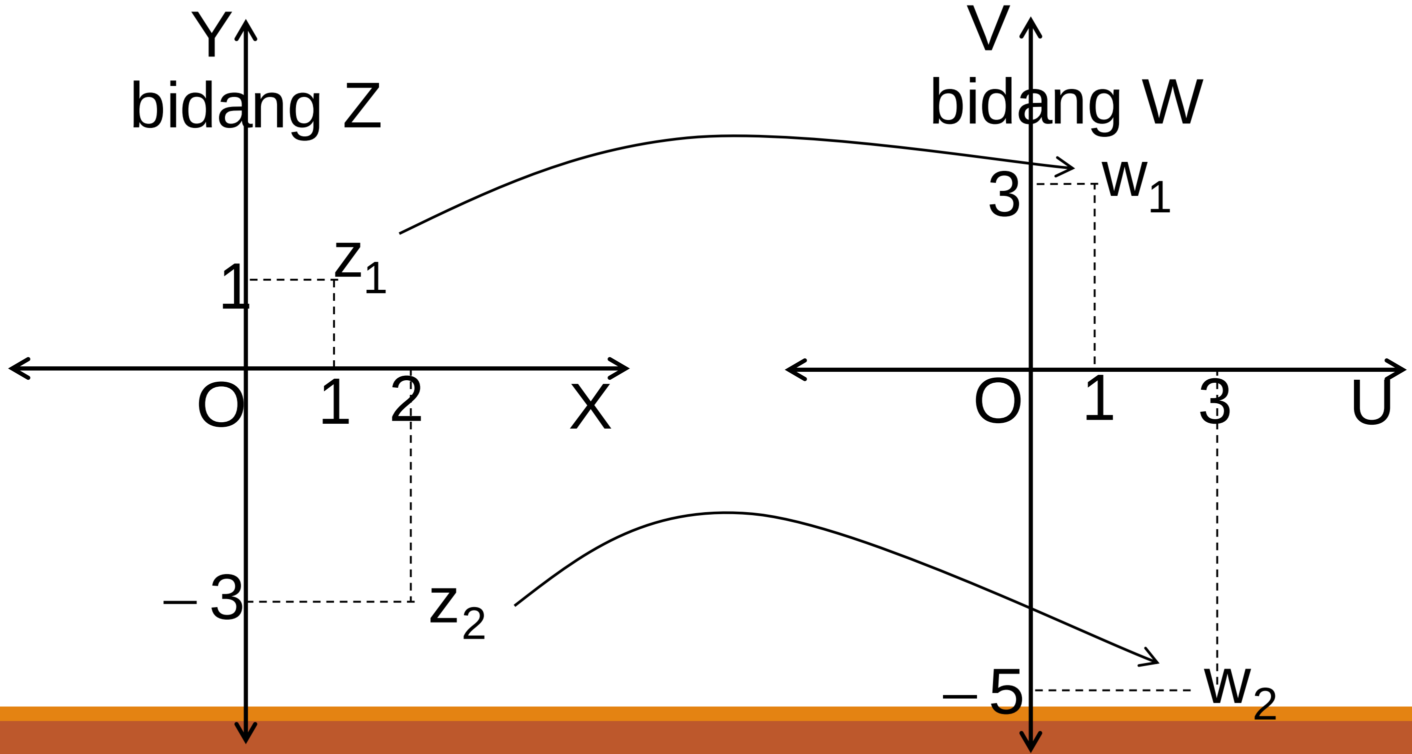
$(g \circ f) \neq (f \circ g)$, (tidak komutatif)

Interpretasi Geometris

Untuk setiap variabel bebas $z = x + iy$ anggota domain ada satu dan hanya satu variabel tak bebas $w = u + iv$ yang terletak pada suatu bidang kompleks. Masing-masing variabel terletak pada suatu bidang kompleks, z pada bidang Z dan w pada bidang W. Karena pasangan (z,w) mengandung 4 dimensi, maka kita tidak dapat menggambarkannya pada satu sistem. Tetapi kita dapat melihat gambaran dari $w = f(z)$. Caranya dengan memandang fungsi f tersebut sebagai pemetaan (transformasi) dari titik di bidang Z ke titik di bidang W dengan aturan f. Untuk suatu titik z maka $f(z)$ disebut peta dari z.

Contoh 1 :

Diketahui fungsi $w = 2z - 1 + i$. Untuk setiap variabel bebas $z = x + iy$ didapat nilai $w = (2x - 1) + (2y + 1)i$. Misalnya untuk $z_1 = 1 + i$, dan $z_2 = 2 - 3i$, berturut-turut diperoleh : $w_1 = 1 + 3i$, dan $w_2 = 3 - 5i$. Gambar dari z_1, z_2, w_1 , dan w_2 dapat dilihat di bawah ini



Contoh 2 :

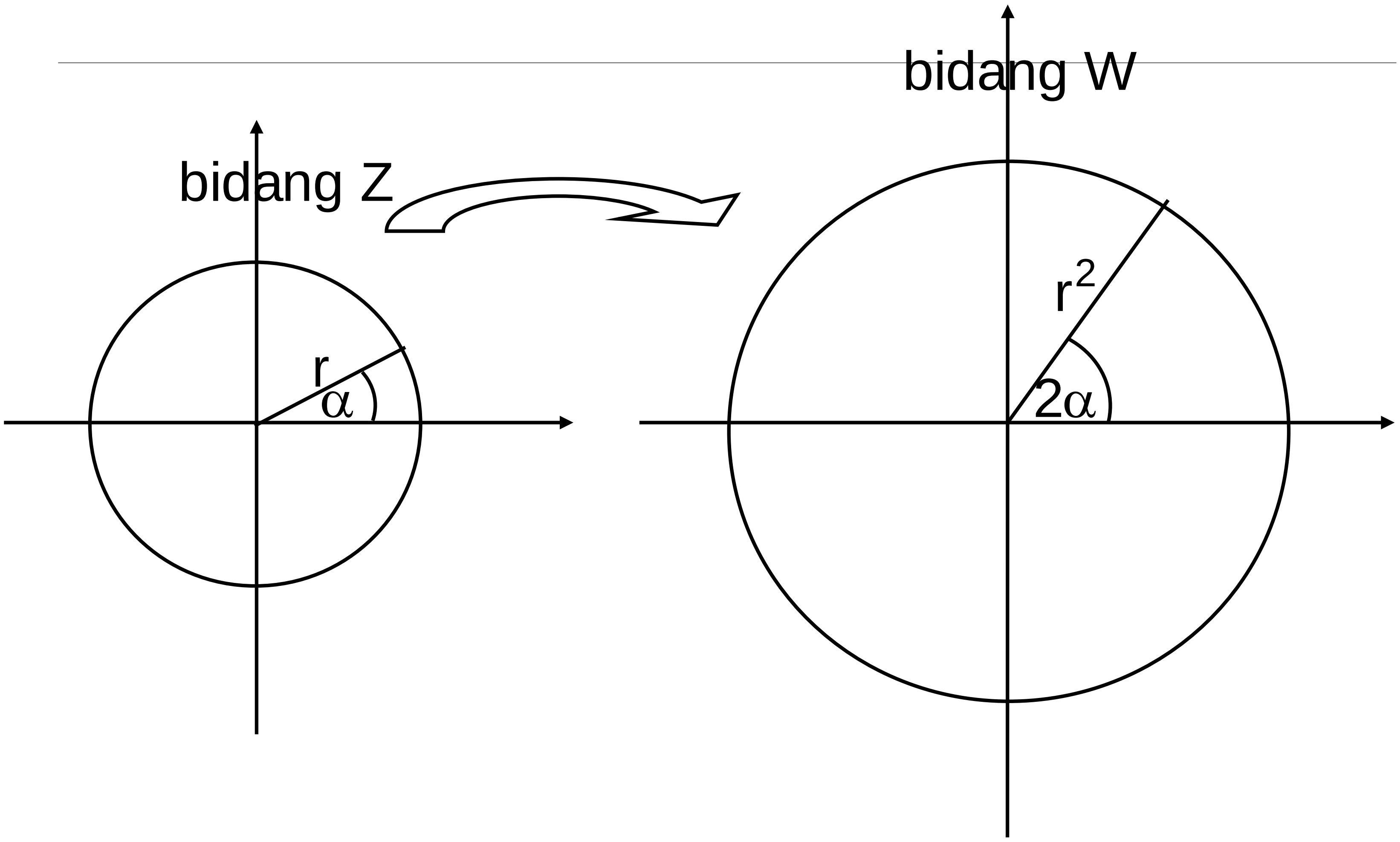
Diketahui fungsi $w = z^2$.

Dengan menggunakan $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, maka diperoleh $w = z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$.

Jika sebuah lingkaran pusat O berjari-jari r pada bidang Z, maka dapat dipetakan ke bidang W menjadi sebuah lingkaran pusat O berjari-jari r^2. Daerah $0 \leq \arg z \leq \alpha$ dipetakan menjadi daerah

$0 \leq \arg w \leq 2\alpha$.

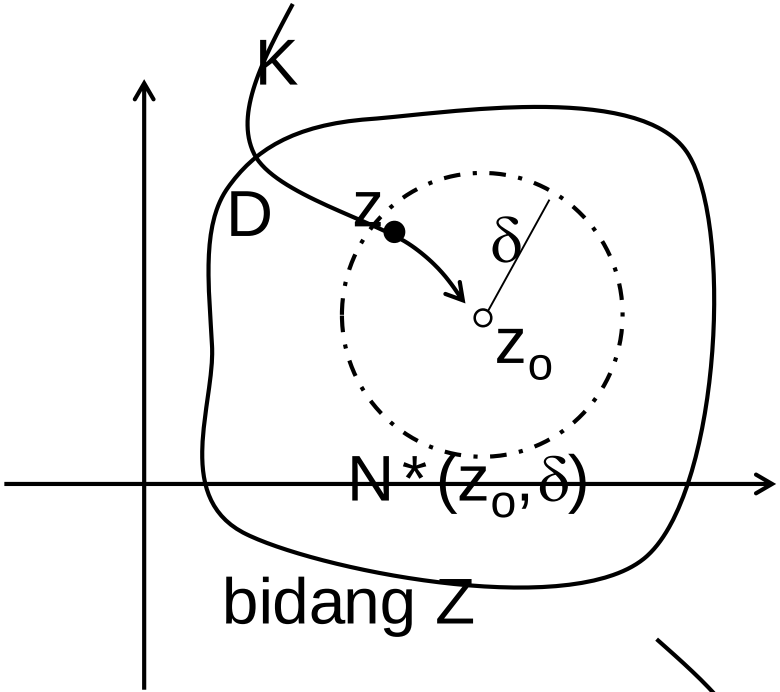
Gambar keduanya dapat dilihat di bawah ini.



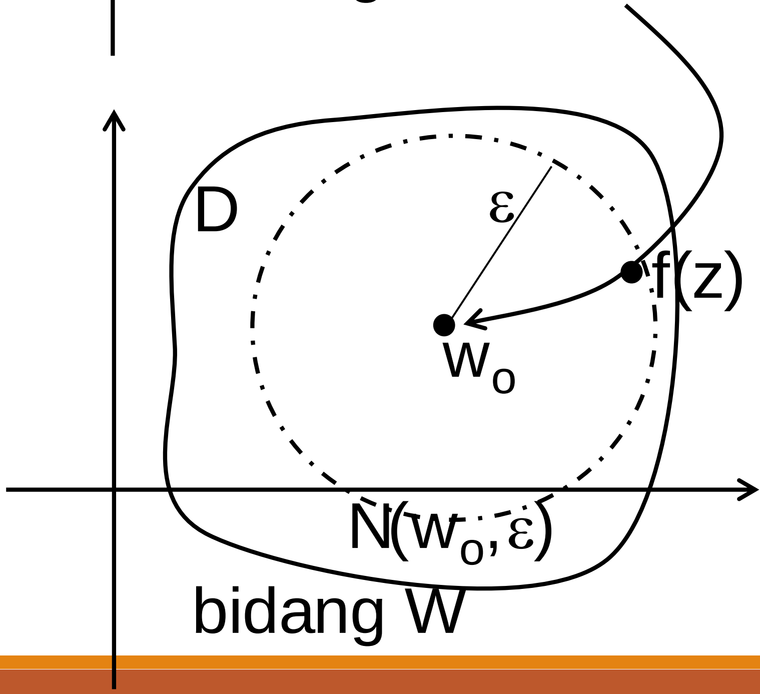
bidang W
bidang Z
r
α
r2
2α

Limit

Diketahui daerah D pada bidang Z dan titik z_o terletak di dalam D atau pada batas D. Misalkan fungsi w = f(z) terdefinisi pada D, kecuali di z_o.



Apabila titik z bergerak mendekati titik z_o melalui setiap lengkungan sebarang K dan mengakibatkan nilai f(z) bergerak mendekati suatu nilai tertentu, yaitu w_o pada bidang W, maka dikatakan limit f(z) adalah w_o untuk z mendekati z_o, ditulis : $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = w_o$



Definisi :

Misalkan fungsi w = f(z) terdefinisi pada daerah D, kecuali di z_o (titik z_o di dalam D atau pada batas D). limit f(z) adalah w_o untuk z mendekati z_o, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga

$|f(z) - w_o| < \varepsilon$, apabila $0 < |z - z_o| < \delta$,

ditulis: $\lim_{z \to z_o} f(z) = w_o$

Perlu diperhatikan bahwa :

1. Titik z_o adalah titik limit domain fungsi f.

2. Titik z menuju z_o melalui sebarang lengkungan K, artinya z menuju z_o dari segala arah.

3. Apabila z menuju z_o melalui dua lengkungan yang berbeda, mengakibatkan f(z) menuju dua nilai yang berbeda, maka limit fungsi f tersebut tidak ada untuk z mendekati z_o.

Contoh 1 :

Buktikan bahwa : $\lim_{z\to 2} \frac{2z^2 - 3z - 2}{z-2} = 5$

Bukti:

Misalkan diberikan bilangan ε > 0, kita akan mencari δ > 0 sedemikian, sehingga:

$$0 < |z-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2z^2 - 3z - 2}{z-2} - 5 \right| < \varepsilon$$, untuk $z \neq 2$

Lihat bagian sebelah kanan

Dari persamaan kanan diperoleh:

$$\left|\frac{2z^2-3z-2}{z-2}-5\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(2z+1)(z-2)}{(z-2)}-5\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(2z+1-5)(z-2)}{(z-2)}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2(z-2)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |z-2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$$

Hal ini menunjukkan bahwa telah diperoleh.

Bukti Formal :

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga untuk $z \neq 2$, diperoleh

$$0 < |z-2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2z^2-3z-2}{z-2}-5\right|$$

$$= \left|\frac{(2z+1)(z-2)}{(z-2)}-5\right|$$

$$= |2(z-2)| < 2\delta = \varepsilon$$

Jadi $\left|\frac{2z^2-3z-2}{z-2}-5\right| < \varepsilon$ apabila $0 < |z-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Terbukti $\lim_{z\to 2}\frac{2z^2-3z-2}{z-2} = 5$

Teorema Limit :

Teorema 1 :

Jika fungsi f mempunyai limit untuk z menuju z_o , maka nilai limitnya tunggal.

Bukti:

Misal limitnya w_1 dan w_2, maka

$$|f(z) - w_1| = |w_1 - f(z)| = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(z) - w_2| = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|w_1 - f(z) + f(z) - w_2| \leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_2| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sehingga $|w_1 - w_2| \leq \varepsilon$

jadi $w_1 = w_2$

Teorema 2 :

Misalkan $z = (x,y) = x+iy$ dan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dengan domain D. Titik $z_o = (x_o,y_o) = x_o+iy_o$ di dalam D atau batas D.

Maka $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = x_o + iy_o$ jika dan hanya jika

$$\lim_{z \to z_o} u(x,y) = x_o \quad \text{dan} \quad \lim_{z \to z_o} v(x,y) = y_o$$

Teorema 3 :

Misalkan fungsi f dan g limitnya ada.

lim f(z) = a dan lim g(z) = b, maka

1. lim (f(z) +g(z)) = a + b (untuk $z \rightarrow z_o$)
2. lim (f(z) . g(z)) = a . b (untuk $z \rightarrow z_o$)
3. lim (f(z) / g(z)) = a / b (untuk $z \rightarrow z_o$)

Tugas : Buktikan ketiga teorema limit tersebut !

Contoh 1 :

Hitunglah $\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$

Jawab:

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = \lim_{z \to i} \frac{(z+i)(z-i)}{z - i}$$

$$= \lim_{z \to i} (z + i)$$

$$= 2i$$

Contoh 2 :

Jika $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y+1}i$. Buktikan $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ tidak ada !

Bukti :

Kita tunjukkan bahwa untuk z menuju 0 di sepanjang garis y = 0, maka

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x\to 0} x^2 i = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1$$

Sedangkan di sepanjang garis y = x,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x^2}{x+1}i\right) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots 2$$

Dari 1 dan 2, terbukti $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ tidak ada

Kekontinuan Fungsi

Definisi :

Misalkan fungsi f(z) terdefinisi di D pada bidang Z dan titik z_o terletak pada interior D, fungsi f(z) dikatakan kontinu di z_o jika untuk z menuju z_o,

maka lim f(z) = f(z_o).

Jadi, ada tiga syarat fungsi f(z) kontinu di z_o, yaitu :

1. $f(z_o)$ ada
2. $\lim_{z \to z_o} f(z)$ ada
3. $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

Fungsi f(z) dikatakan kontinu pada suatu daerah R, jika f(z) kontinu pada setiap titik pada daerah R tersebut.

Teorema 4 :

Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f(z)$ terdefinisi di setiap titik pada daerah R, dan $z_o = x_o + i\,y_o$ titik di dalam R, maka fungsi $f(z)$ kontinu di z_o jika dan hanya jika $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ masing-masing kontinu di (x_o,y_o).

Teorema 5 :

Andaikan f(z) dan g(z) kontinu di z_o, maka masing-masing fungsi :

1. $f(z) + g(z)$
2. $f(z) \,.\, g(z)$
3. $f(z) / g(z)$, $g(z) \neq 0$
4. $f(g(z))$; f kontinu di $g(z_o)$,

kontinu di z_o.

Contoh 1 :

Fungsi $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+4}{z-2i}, & z \neq 2i \\ 3+4z, & z = 2i \end{cases}$, apakah kontinu di 2i

Jawab :

f(2i) = 3 + 4(2i) = 3 + 8i,

sedangkan untuk z mendekati 2i, lim f(z) = z + 2i,

sehingga $\lim\limits_{z \to 2i} f(z) \neq f(2i)$

jadi f(z) diskontinu di z = 2i.

Contoh 2.

Dimanakah fungsi $g(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 - 3z + 2}$ kontinu ?

Jawab :

Coba anda periksa bahwa g(z) diskontinu di z = 1 dan z = 2. Jadi g(z) kontinu di daerah $\{ z \,|\, |z| > 2 \}$