Matriks dan Ruang Vektor

1

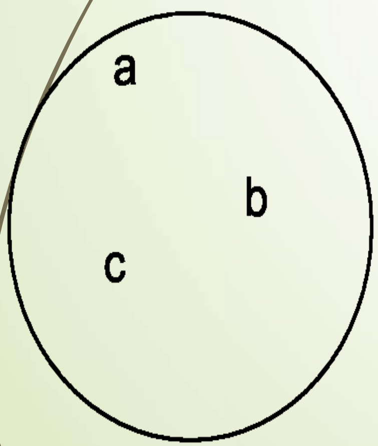
Determinan dari Matriks

Pengertian

Determinan :

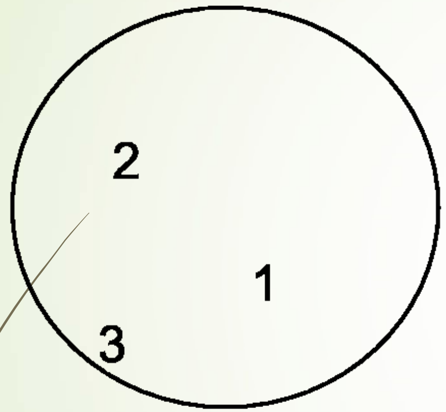
adalah bilangan yang dihitung dari jumlah berikut : melibatkan n^2 elemen jumlah yang diambil terhadap semua permutasi dan subskrip kedua. Se-buah unsur diberi tanda + jika (i, j, … , r) adalah permutasi genap dari (1, 2, … , n); dan tanda – jika ia adalah permutasi ganjil.

∗ **Permutasi**



a b c	b a c	c a b
a c b	b c a	c b a

Permutasi bilangan asli :



1 2 3	2 1 3	3 1 2
1 3 2	2 3 1	3 2 1

* **Inversi pada permutasi :**

  Keadaan di mana bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dalam urutannya

Contoh :

1 2 3 -> inversinya = 0+0+0= 0

1 3 2 -> inversinya = 0+0+1= 1

2 1 3 -> inversinya = 1+0+0= 1

2 3 1 -> inversinya = 0+1+1= 2

3 1 2 -> inversinya = 1+1+0= 2

3 2 1 -> inversinya = 1+1+1= 3

* Permutasi genap bila banyaknya inversi genap

* Permutasi ganjil bila banyaknya inversi ganjil
* Definisi Determinan :
  Determinan matriks bujur sangkar A = $|A|$ atau det A adalah jumlah semua perkalian elementer matriks A.

  Bila inversinya genap tanda +

  Bila inversinya ganjil tanda -

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, |A| = ad - bc$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= (3 \text{ x } 5) - (7 \text{ x } 2)$$

$$= 15 - 14$$

$$|A| = 1$$

Sifat-Sifat Determinan

Mencari determinan dengan sifat-sifatnya

1. **Bila ada baris/kolom yang semua unsurnya nol, maka determinan-nya = 0**

Contoh :

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.5 - 0.4 = 0 - 0 = 0$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2.0 - 0.3 = 0 - 0 = 0$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 & 8 \\ 3 & -4 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

d) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. **Matriks Δ atas dan matriks Δ bawah**

Determinan matriks Δ atas / Δ bawah adalah = perkalian elemen-elemen diagonal utama

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 2 \text{ x } 4 \text{ x } 1 = 8$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 2 \text{ x } 3 \text{ x } 2 = 12$$

3. Bila salah satu baris/kolom dikalikan p, maka determinannya dikalikan p

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1$$

$$\text{Baris pertama x (p} = 3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{b12(3)} \begin{bmatrix} 9 & 21 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 45 - 42 = 3$$

$$|A_1| = 3|A|$$

$$4.\ \text{Bila } A \xrightarrow{bij} A_1, \text{ maka } |A_1| = -|A|$$

$$\text{Contoh} : A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{b12} A_1 = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 42 - 40 = 2$$

$$|A| = -|A_1|$$

$$|A_1| = -|A|$$

5. Bila A dan B matriks bujur sangkar, maka

$$|A.B| = |A|.|B|$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 5, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 3$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 & 43 \\ 39 & 18 \end{bmatrix}$$

$$|A.B| = 15 \rightarrow |A|.|B| = 5x3 = 15$$

6. Bila A Matriks Non - singular, maka

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 3$$

$$A^{-1=} \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

$$A^{-1=} = \frac{1}{|A|} adj\,(A)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ -2 & 5/3 \end{bmatrix}$$

$$7.\ \left|A^t\right| = |A|$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad A^t = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4 \qquad \left|A^t\right| = 4$$

Rank Matriks

A = matriks berukuran m x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

* Rank baris (row rank) matriks A = jumlah maksimum baris yang bebas linier

* Rank kolom (column rank) = jumlah maksimum kolom yang bebas linier

9. **Jika elemen-elemen pada baris ke r matriks A merupakan jumlah elemen -elemen yang bersesuai-an (pada baris ke r juga) dari matriks B dan C sedang elemen-elemen yang lain sama, maka**

$$|A| = |B| + |c|$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$-2 = (3-2) + (3-6)$

$-2 = 1+(-3)$

$-2 = -2$

Minor dan Kofaktor

Bila matriks A_{ij} adalah matriks A yang dibuang baris ke i dan kolom ke j, maka $|A_{ij}|$ di sebut minor ke ij dari A atau : $M_{ij} = |A_{ij}|$ dan

kofaktor ke ij dari A adalah : $(-1)^{i+j} . |A_{ij}|$

disingkat :

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} . \; M_{ij}$$

Contoh :

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{matrix}$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3} . M_{23}$$

$$= (-1)^5 . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1(1x8 - 2x7)$$

$$= -1(8 - 14) = -1(-6) = 6$$

Mencari Determinan

a. Cara Sarrus (khusus ordo 3 x 3)

b. Cara Kofaktor (ordo n x n)

c. Diubah terlebih dahulu menjadi matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah , kemudian menggunakan sifat determinan dari matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah, di mana determinannya adalah hasil kali semua elemen pada diagonal utumanya.

Contoh :

Diketahui :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cara Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

$$|A| = \left[(1.5.6) + 4.2.3) + (3.2.6)\right] - \left[(3.5.3) + (6.2.1) + 6.2.4)\right]$$

$$|A| = (30 + 24 + 36) - (45 + 12 + 48)$$

$$|A| = 90 - 105$$

$$|A| = -15$$

Cara Kofaktor

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, tentukan determinan matriks A !

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \quad K_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22} \ ,$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \quad K_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21} \ ,$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \quad K_{21} = (-1)^{2+1}|a_{12}| = -a_{12} \ ,$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \quad K_{21} = (-1)^{2+1}|a_{12}| = -a_{12}$$

1. Matriks diekspansi pada baris –1 :

$$|A| = a_{11} \cdot K_{11} + a_{12} \cdot K_{12}$$
$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-a_{21})$$
$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2. **Matriks diekspansi pada baris –2 :**

$$|A| = a_{21} \cdot K_{21} + a_{22} \cdot K_{22}$$

$$|A| = a_{21} \cdot (-a_{12}) + a_{22} \cdot a_{11}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

3. **Matriks diekspansi pada kolom –1 :**

$$|A| = a_{11} \cdot K_{11} + a_{21} \cdot K_{21}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} + a_{21} \cdot (-a_{12})$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

4. **Matriks diekspansi pada kolom –2 :**

$$|A| = a_{12} \cdot K_{12} + a_{22} \cdot K_{22}$$

$$|A| = a_{12} \cdot (-a_{21}) + a_{22} \cdot a_{11}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dapat disimpulkan , bahwa :

Determinan A dari ordo 2x2 = $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\text{tentukan determinan A} = ?$$

Matriks diekspansi pada baris pertama:

$$K_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix} = +1(30-12) = 18$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix} = -1(12-6) = -6$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix} = +1(12-15) = -3$$

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13}\\ &= (1)(18) + (4)(\text{-}6) + (3)(\text{-}3)\\ &= 18 \text{ - } 24 \text{ - } 9\\ &= \text{-}15\end{aligned}$$

Contoh : Tentukan determinan dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

* Matriks A diekspansi pada baris ke 1

$K_{11} = (-1)^{1+1} \ |4| \ =+1(4)=4$

$K_{12} = (-1)^{1+2} \ |3| \ =-1(3)=-3$

$|A| = a_{11}.k_{11}+a_{12}.k_{12}$

$= (1).(4)+(2).(-3)$

$= 4-6 = -2$

Matriks A diekspansi pada kolom ke 1

$K_{11} = (-1)^{1+1} \ |4| \ =+1(4)=4$

$K_{21} = (-1)^{2+1} \ |2| =-1(2)=-2$

$|A| = a_{11}.K_{11}+a_{21}.K_{21}$

$= (1).(4)+(3).(-2)$

$= 4-6 = -2$

Mencari determinan dengan cara kofaktor dari matriks n x n, banyak-nya = (n + n) cara
jadi untuk matriks 3 x 3 , ada (3 + 3) cara = 6 cara

Contoh :

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks A diekspansi pada baris ke 1 :

$$|A| = a_{11} \cdot K_{11} + a_{12} \cdot K_{12} + a_{13} \cdot K_{13}$$

Matriks A diekspansi pada baris ke 2 :

$$|A| = a_{21} \cdot K_{21} + \mathbf{a}_{22} \cdot K_{22} + \mathbf{a}_{23} \cdot K_{23}$$

Matriks A diekspansi pada baris ke 3 :

$$|A| = a_{31} \cdot K_{31} + \mathbf{a}_{32} \cdot K_{32} + \mathbf{a}_{33} \cdot K_{33}$$