

TURUNAN (DIFERENSIAL)

3.1 Konsep Turunan

3.1.1 Turunan di satu titik

Pendahuluan (dua masalah dalam satu tema)

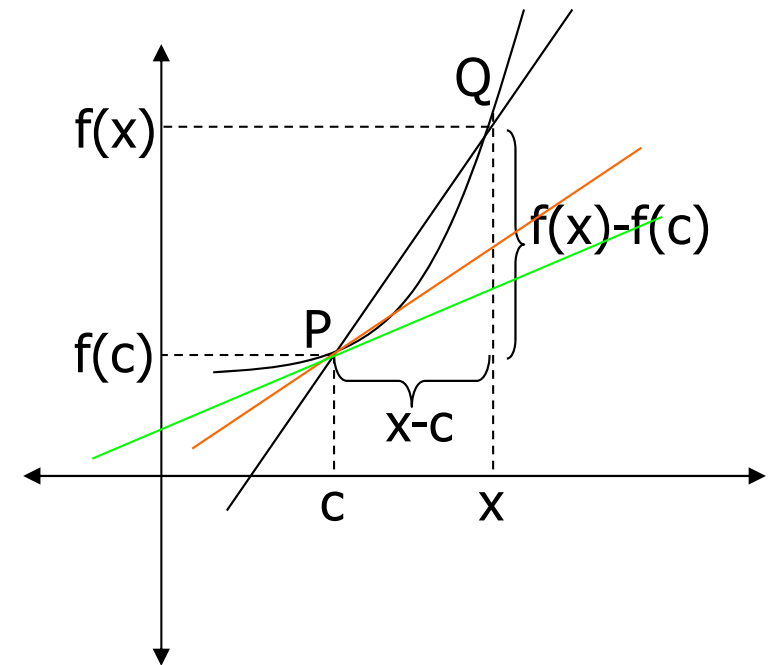
a. Garis Singgung

Kemiringan tali busur PQ adalah :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

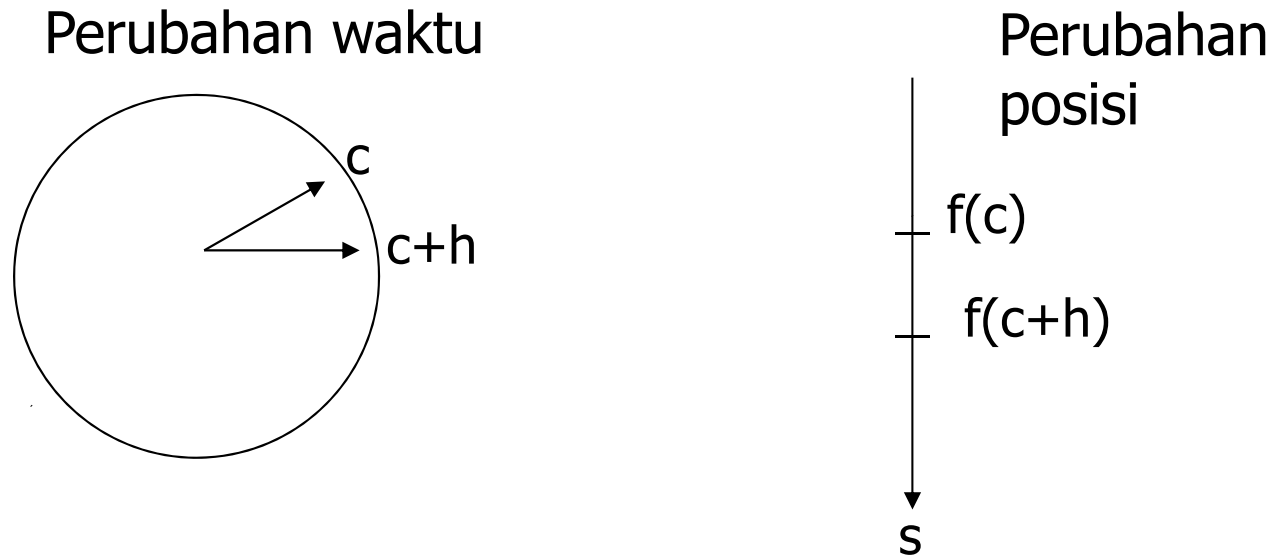
Jika $x \rightarrow c$, maka tali busur PQ akan berubah menjadi garis singgung di titik P dgn kemiringan

$$m = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



b. Kecepatan Sesaat

Misal sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya setiap saat diberikan oleh $s = f(t)$. Pada saat $t = c$ benda berada di $f(c)$ dan saat $t = c + h$ benda berada di $f(c+h)$.



Sehingga kecepatan rata-rata pada selang waktu $[c, c+h]$ adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika $h \rightarrow 0$, diperoleh kecepatan sesaat di $x = c$:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Misal $x = c + h$, bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk

$$v = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Dari dua bentuk diatas : kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat terlihat bahwa dua masalah tersebut berada dalam satu tema, yaitu turunan

Definisi 3.1 : Turunan pertama fungsi f di titik $x = c$, notasi $f'(c)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit diatas ada

Notasi lain :

$$\frac{df(c)}{dx}, y'(c)$$

Contoh : Diketahui $f(x) = \frac{1}{x}$ tentukan $f'(3)$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{3x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)}{3x(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

3.1.2 Turunan Sepihak

Turunan kiri dari fungsi f di titik c , didefinisikan sebagai :

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan kanan dari fungsi f di titik c , didefinisikan sebagai :

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi f dikatakan mempunyai turunan(diferensiabel) di c atau $f'(c)$ ada, jika

$$f'_-(c) = f'_+(c) \quad \text{dan} \quad f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$$

sebaliknya f dikatakan tidak mempunyai turunan di c .

Contoh : Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x < 1 \\ 1 + 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$

Selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel di $x=1$

Jika ya, tentukan $f'(1)$

Jawab :

a.
$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 3 - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1$$

b.
$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

Jadi, f diferensiabel di $x=1$. dan $f'(1) = 1$.

□ **Teorema 3.1** Jika f diferensiabel di $c \rightarrow f$ kontinu di c .

□ **Bukti** : Yang perlu ditunjukkan adalah

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

□ Perhatikan bahwa $f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c)$, $x \neq c$

□ Maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(c) + \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c). \quad \text{Terbukti.} \end{aligned}$$

□ Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, Jika f kontinu di c , maka belum tentu f diferensiabel di c . Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh Tunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$ tetapi tidak diferensiabel di $x = 0$

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu di $x=0$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

□ $f(0) = 0$

□ $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

□ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

f kontinu di $x=0$

Selidiki apakah f terdiferensialkan di $x=0$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Karena $-1 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1$

maka f tidak diferensiabel di 0.

Contoh: Tentukan konstanta a dan b agar fungsi $f(x)$ berikut diferensiabel di $x=1$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b, & x < 1 \\ ax, & x \geq 1 \end{cases}$$

Jawab : Agar $f(x)$ terdiferensialkan di $x = 1$, haruslah

- a. f kontinu di $x = 1$ (syarat perlu)
- b. Turunan kiri = turunan kanan di $x = 1$ (syarat cukup)

f kontinu di $x = 1$ jika f kontinu kiri dan kontinu kanan di $x = 1$ atau

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + b = \lim_{x \rightarrow 1} ax \Leftrightarrow a = 1 + b = a \Leftrightarrow b = a - 1$$

$$\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + b - a}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (a - 1) - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2
\end{aligned}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - a}{x - 1} = a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} = a$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 2$$

Maka diperoleh : $a = 2$ dan $b = 1$.

Soal Latihan

Tentukan nilai a dan b agar fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ; 0 \leq x < 1 \\ x^2 - bx & ; x \geq 1 \end{cases} \quad , x = 1$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} ax - b & ; x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ; x \geq 2 \end{cases} \quad , x = 2$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x < 3 \\ 2ax + b & ; x \geq 3 \end{cases} \quad , x = 3$$

3.2 Aturan Pencarian Turunan

Fungsi Turunan Pertama

- **Definisi 3.2** Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada selang I . Fungsi turunan pertama dari f , ditulis $f'(x)$ didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad \forall x \in I$$

- atau jika $h=t-x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \forall x \in I$$

bila limitnya ada.

- Notasi lain y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $D_x y$, $D_x f(x)$, bentuk $\frac{dy}{dx}$ dikenal

sebagai notasi **Leibniz**.

- Dengan menggunakan definisi tersebut dapat diturunkan **aturan untuk mencari turunan** sebagai berikut :

1. Jika $f(x)=k$, maka $f'(x) = 0$

2.
$$\frac{d(x^r)}{dx} = r x^{r-1} ; r \in R$$

3.
$$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

4.
$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

5.
$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$
 dengan $g(x) \neq 0$.

Bukti aturan ke-4

Misal $h(x) = f(x)g(x)$

$$\begin{aligned}h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\&= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Contoh

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

Jawab :

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x + 0 = 3x^2 + 6x$$

2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 + 2x + 3)$

Jawab :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(x^2 + 2x + 3) + (x^3 + 1)(2x + 2) \\ &= 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 2x^4 + 2x^3 + 2x + 2 \\ &= 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$

Jawab :

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - 2x(x + 3)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 6x - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

3.3 Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

$$a. f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$b. f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

Bukti:

a. Misal $f(x) = \sin x$ maka

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{2 \cos\left(\frac{t+x}{2}\right) \sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \cos\left(\frac{t+x}{2}\right) \cdot \lim_{\frac{t-x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\left(\frac{t-x}{2}\right)}$$

$$= \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

b. Misal $f(x) = \cos x$ maka

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cosh - 1) - \sin x \sinh}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \left(-\sin^2 \frac{h}{2}\right)}{h} - \sin x \frac{\sinh}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x \left(-\sin^2 \frac{h}{2}\right)h}{(h/2)^2 4} - \sin x \frac{\sinh}{h} \right) &= \cos x \lim_{(h/2) \rightarrow 0} - \left(\frac{\sin(h/2)}{h/2} \right)^2 \frac{h}{4} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \\
 &= \cos x \cdot 0 - \sin x = -\sin x
 \end{aligned}$$

Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan, khususnya turunan bentuk u/v

$$c. \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$d. \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$e. \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

$$f. \frac{d(\csc x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

3.4 Aturan Rantai

- Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika $\frac{dy}{du}$ dan $\frac{du}{dx}$ ada, maka
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sin(x^2 + 1)$

Jawab :

Misal $u = x^2 + 1$ sehingga bentuk diatas menjadi $y = \sin u$

Karena

$$\frac{dy}{du} = \cos u \text{ dan } \frac{du}{dx} = 2x$$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + 1) 2x = 2x \cos(x^2 + 1)$$

Jika $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$, dan $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dv}$, $\frac{dv}{dx}$ Ada, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \text{Sin}^4(x^3 + 5)$

Jawab :

Misal $v = x^3 + 5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$

$u = \text{Sin } v \rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v = \cos(x^3 + 5)$

$y = u^4 \rightarrow \frac{dy}{du} = 4u^3 = 4\text{Sin}^3(x^3 + 5)$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 12x^2 \text{Sin}^3(x^3 + 5) \text{Cos}(x^3 + 5)$$

- Contoh : Tentukan $f'(x^2)$ jika $\frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1$

Jawab :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1 &\Leftrightarrow f'(x^2) \cdot 2x = x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{x^2 + 1}{2x}\end{aligned}$$

3.5 Turunan Tingkat Tinggi

- Turunan ke- n didapatkan dari penurunan turunan ke- $(n-1)$.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left(f^{(n-1)}(x) \right)$$

- Turunan pertama $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

- Turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

- Turunan ketiga $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$

- Turunan ke- n $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$

- **Contoh** : Tentukan y'' dari $y = 4x^3 + \sin x$

- **Jawab** :

$$y' = 12x^2 + \cos x \quad \text{maka} \quad y'' = 24x - \sin x$$

3.6 Turunan Fungsi Implisit

- Jika hubungan antara y dan x dapat dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$ maka y disebut **fungsi eksplisit** dari x , yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan **y fungsi implisit dari x** .

Contoh :

1. $x^3 y^2 + x^2 + y = 10$

2. $\sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$

- Untuk menentukan turunan dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap y fungsi dari x .

Tentukan dy/dx dari bentuk implisit berikut

$$1. x^3 y^2 + x^2 + y = 10 \quad 2. \sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$$

Jawab

$$1. D_x(x^3 y^2 + x^2 + y) = D_x(10)$$

$$D_x(x^3 y^2) + D_x(x^2) + D_x(y) = D_x(10)$$

$$(3x^2 y^2 + 2x^3 y y') + 2x + y' = 0$$

$$(2x^3 y + 1)y' = -2x - 3x^2 y^2$$

$$y' = \frac{-2x - 3x^2 y^2}{2x^3 y + 1}$$

$$2. D_x(\sin(xy) + x^2) = D_x(y^2 + 1)$$

$$\cos(xy)(y + xy') + 2x = 2yy' + 0$$

$$(x \cos(xy) - 2y)y' = -2x - y \cos(xy)$$

$$y' = \frac{-2x - y \cos(xy)}{x \cos(xy) - 2y}$$

3.7 Garis singgung dan garis normal

- Persamaan garis singgung fungsi $y = f(x)$ di titik (x_0, y_0) dengan kemiringan m adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

- Garis yang tegak lurus dengan garis singgung disebut dengan garis normal.
- Persamaan garis normal di titik (x_0, y_0) adalah

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

Contoh: Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal

fungsi $y = x^3 - 2x^2 + 6$ di $(2,6)$.

Jawab : $y' = 3x^2 - 4x \rightarrow y'(2,6) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$

Sehingga persamaan garis singgung di titik $(2,6)$:

$$y - 6 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 2$$

Persamaan garis normal dititik $(2,6)$:

$$y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y - 6 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{2}.$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva

$$x^2 y^2 - xy - 6 = 0 \quad \text{di titik dengan absis}(x) = 1$$

Jawab :

Jika disubstitusikan nilai $x = 1$ pada persamaan kurva diperoleh

$$y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y - 3)(y + 2) = 0 \quad y = 3 \text{ dan } y = -2$$

Sehingga diperoleh titik dimana akan ditentukan persamaan garis singgung dan garis normalnya adalah $(1,3)$ dan $(1,-2)$

Hitung terlebih dahulu y' dengan menggunakan turunan fungsi implisit

$$D_x(x^2 y^2 - xy - 6) = D_x(0) \Leftrightarrow 2xy^2 + 2x^2 yy' - (y + xy') - 0 = 0$$

$$2xy^2 + 2x^2 yy' - y - xy' = 0$$

$$(2x^2 y - x)y' = y - 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2xy^2}{2x^2 y - x}$$

Di titik (1,3)

$$y'|_{(1,3)} = \frac{3 - 2 \cdot 1 \cdot 9}{2 \cdot 1 \cdot 3 - 1} = \frac{-15}{5} = -3$$

Persamaan garis singgung

$$y - 3 = -3(x - 1) = -3x + 3$$

$$3x + y = 6$$

Persamaan garis normal

$$y - 3 = \frac{5}{3}(x - 1) = \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$x - 3y = -8$$

Di titik (1,-2)

$$y'|_{(1,-2)} = \frac{-2 - 2 \cdot 1 \cdot 4}{2 \cdot 1 \cdot (-2) - 1} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Persamaan garis singgung

$$y + 2 = 2(x - 1) = 2x - 2$$

$$2x - y = 4$$

Persamaan garis normal

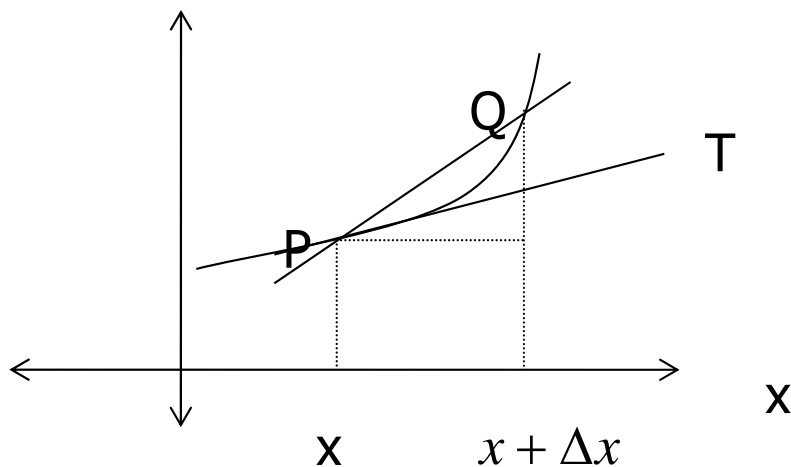
$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$x + 2y = -3$$

3.8 Diferensial dan Hampiran

■ 3.8.1 Diferensial

- Jika $f'(x)$ ada, maka
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Untuk Δx sangat kecil, maka $m_{PQ} = m_{PT}$ yakni $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$, $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

- **Definisi 4.4** Jika $y = f(x)$ diferensiabel di x , maka
Diferensial dari x , dinyatakan dengan dx , adalah $dx = \Delta x$
Diferensial dari y , dinyatakan dengan dy , adalah $dy = f'(x)dx$

3.8.2 Hampiran

- Perhatikan kembali gambar sebelumnya,
- Misalkan $y = f(x)$ diferensiabel di interval I yang memuat x dan $x + \Delta x$. Jika x ditambah Δx , maka y bertambah sepadan dengan Δy yang dapat dihampiri oleh dy .
- Jadi, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$ (*)

- **Contoh** : Hampiri $\sqrt[3]{28}$

- **Jawab** : Pandang, $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(27) = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(27) = \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(3^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27}$$

Dengan pers (*)

$$f(28) \approx f(27) + f'(27)(28 - 27) = 3 \frac{1}{27}$$

Soal Latihan

1. Diketahui kurva yang dinyatakan secara implisit

$$y + \sin(xy) = 1$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal di $(\pi, 1)$

2. Gunakan diferensial untuk menghampiri

a. $\sqrt{8,2}$

b. $\sqrt{36,1}$

3. Jika diketahui $f'(0) = 2$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 3$ tentukan $(f \circ g)'(0)$.