MATEMATIKA TEKNIK 1

3 SKS

TEKNIK ELEKTRO

UDINUS

BAB III. TURUNAN

3.1 Definisi Turunan

Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada daerah D dan $z_o \in D$.

Jika diketahui bahwa nilai $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$ ada, maka

nilai limit ini dinamakan *turunan* atau *derivatif* fungsi f di titik z_o.

Dinotasikan : $f'(z_o)$

⇛ Jika $f'(z_o)$ ada, maka f dikatakan *terdifferensial* atau *diferensiabel* di z_o.

Dengan kata lain :

$$f'(z_o) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z}$$

⇛ Jika f terdifferensial di semua titik pada D, maka f terdifferensial pada D

Contoh 3.1.1

Buktikan $f(z) = z^2$ terdifferensiasi diseluruh $\mathbb{C}$

Bukti :

Ditinjau sebarang titik $z_o \in \mathbb{C}$

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z \to z_o}$$

$$= \lim_{z \to z_o} \frac{z^2 - z_o^2}{z - z_o}$$

$$= \lim_{z \to z_o} \frac{(z + z_o)(z - z_o)}{z - z_o}$$

$$= 2z_o$$

Karena z_o sebarang maka $f(z) = z^2$ terdefferensial

di seluruh $\mathbb{C}$

Teorema 3.1

Jika f fungsi kompleks dan $f'(z_o)$ ada, maka

---

f kontinu di z_o

Bukti :

Bukti :

Diketahui $f'(z_o)$ ada

Akan dibuktikan f kontinu di z_o atau $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

$$\lim_{z \to z_o} (f(z) - f(z_o)) = \lim_{z \to z_o} \left(\frac{f(z) - f(z_o)}{(z - z_o)} \cdot (z - z_o) \right)$$

$$= \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{(z - z_o)} \cdot \lim_{z \to z_o} (z - z_o)$$

$$= f'(z) \cdot 0$$

$$= 0$$

sehingga $\lim_{z \to z_o} f(z) = \lim_{z \to z_o} f(z_o) = f(z_o)$

dengan kata lain f kontinu di z_o.

Contoh 3.1.2

Buktikan $f(z) = |z|^2$ kontinu di seluruh bidang kompleks tetapi hanya terdifferensial di $z = 0$

Bukti :

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ berarti $u(x,y) = x^2 + y^2$ dan $v(x,y) = 0$

u dan v kontinu di D, maka f(z) kontinu di D

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z\bar{z}}{z} = 0$$

Jadi f(z) terdifferensial di $z = 0$

3.2 Syarat Chauchy-Riemann

Syarat yang diperlukan agar fungsi f terdiferensial di $\mathbf{z}_o = x_o + i\, y_o$ adalah syarat Chauchy-Riemann, yang menghubungkan derivatif-derivatif parsial tingkat pertama dari fungsi bagian real dan fungsi bagian imajiner dari f.

Terema 3.2.1 (Syarat Chauchy-Riemann

Jika $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ terdifferensial di $z_o = x_o + i\,y_o$, maka $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ mempunyai derivatif parsial pertama di (x_o,y_o) dan di titik ini dipenuhi persamaan Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

derivatif f di z_o dapat dinyatakan dengan

$$f'(z_o) = u_x(x_o, y_o) + i v_x(x_o, y_o)$$

Jika persamaan C-R tidak dipenuhi di (x_o,y_o) maka $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ tidak terdifferensial di $z_o = x_o + i\,y_o$

Contoh 3.2.1

Buktikan $f(z) = |z|^2$ tidak terdifferensiasi di $z \neq 0$

Bukti : $f(z) = x^2 + y^2$ sehingga

$u(x,y) = x^2 + y^2$

$v(x,y) = 0$

Persamaan Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 2x = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 2y = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) dan (2) tidak dipenuhi jika $x \neq 0$ atau $y \neq 0$,

jadi pasti f tidak terdeferensial di $z \neq 0$

Catatan :

Syarat C-R hanya syarat perlu untuk keterdifferensialan.

Contoh 3.2.2

Buktikan fungsi f(z) = $\dfrac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2}$

dan f(0) = 0, tidak terdifferensial di 0, memenuhi C-R

Bukti :

$u = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ dengan u(0,0) = 0

$v = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ dengan v(0,0) = 0

$u_x(0,0) = \lim\limits_{x\to o} \dfrac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = 1$

$u_y(0,0) = \lim\limits_{y\to o} \dfrac{u(0,y)-u(0,0)}{y} = -1$

$$v_x(0,0) = \lim_{x \to o} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = 1$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y \to o} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = 1$$

Jadi persamaan Cauchy - Riemann terpenuhi

Tetapi $\displaystyle \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{(x^2 + y^2)(x + iy)}$

Untuk $z \to 0$

Sepanjang garis real $y = 0 \to \displaystyle \lim_{x \to o} \frac{x^3(1+i)}{x^3} = 1 + i$

Sepanjang garis real y = x $\rightarrow \lim_{x \to o} \dfrac{2i\,x^3}{2(1+i)\,x^3} = \dfrac{i}{1+i}$

Jadi $\lim_{z \to o} \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$ tidak ada

sehingga f tidak terdifferensial di 0 meskipun

persamaan C-R dipenuhi di (0,0)

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa :

i. Syarat perlu

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_o = x_o + i\, y_o$

$f'(z)$ ada maka $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ada di (x_o, y_o)

berlaku C-R yaitu :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

dan $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$

ii. Syarat cukup

$u(x,y)$, $v(x,y)$, $u_x(x,y)$, $v_x(x,y)$, $u_y(x,y)$, $v_y(x,y)$ kontinu pada kitar $z_o = x_o + i y_o$ dan di (x_o,y_o) dipenuhi C-R maka $f'(z_o)$ ada

Contoh 3.2.3

Buktikan $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ terdiferensial untuk setiap z dalam $\mathbb{C}$

Bukti :

$$\left.\begin{array}{lll} u(x,y) = e^x \cos y \rightarrow & u_x(x,y) = e^x \cos y \\ & u_y(x,y) = -e^x \sin y \\ v(x,y) = e^x \sin y \rightarrow & v_x(x,y) = e^x \sin y \\ & v_y(x,y) = e^x \cos y \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{ada dan} \\ \text{kontinu di} \\ \text{setiap } (x,y) \in \mathbb{C}\end{array}$$

Berdasarkan persamaan C-R :

$u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ dipenuhi di $\forall$ $(x,y) \in \mathbb{C}$, dan ada kitar dimana keenam fungsi kontinu dan C-R dipenuhi di (x,y).

Jadi f'(z) ada $\forall$ $z \in \mathbb{C}$.

Dan $f'(z) = u_x(x,y) + i\, v_x(x,y)$

$= e^x \cos y + i\, e^x \sin y$

3.3 Syarat C-R Pada Koordinat Kutub

Jika $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ dapat diilustrasikan dalam koordinat kartesius maka dengan menggunakan hubungan $x = r \cos \varphi$ dan $y = r \sin \varphi$, diperoleh

$z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$, sehingga

$f(z) = u(r, \varphi) + i\,v(r, \varphi)$ dalam sistem koordinat kutub

Teoreama 3.3.1

Jika $f(z) = u(r, \varphi) + i\, v(r, \varphi)$ terdiferensial dan kontinu pada suatu kitar (r_o, φ_o) dan jika dalam kitar tersebut $u_r, u_\varphi, v_r, v_\varphi$ ada dan kontinu di (r_o, φ_o) dan dipenuhi C-R yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad , r \neq 0$$

maka $f'(z)$ = ada di $z = z_o$ dan

$f'(z) = (\cos \varphi_o - i \sin \varphi_o)\,[u_r(r_o, \varphi_o) + i\, v_r(r_o, \varphi_o)]$

Contoh 3.3.1

Diketahui $f(z) = z^{-3}$,

tentukan f’(z) dalam bentuk kootdinat kutub

Jawab :

$f(z) = z^{-3} = r^{-3} (\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi)$, maka :

$u = r^{-3} \cos 3\varphi$, sehingga $u_r = -3r^{-4} \cos 3\varphi$ dan

$u_\varphi = -3r^{-3} \sin 3\varphi$

$v = -r^{-3} \sin 3\varphi$, sehingga $v_r = 3r^{-4} \sin 3\varphi$ dan

$v_\varphi = -3r^{-3} \cos 3\varphi$

keenam fungsi ini kontinu dan syarat C-R dipenuhi untuk semua $z \neq 0$

Jadi $f(z) = z^{-3}$ terdiferensial untuk $z \neq 0$

Dengan demikian $f'(z)$ dalam koordinat kutub adalah :

$$f'(z) = (\cos \varphi - i \sin \varphi) (-3r^{-4} \cos 3\varphi + i\, 3r^{-4} \sin 3\varphi)$$

$$= \text{cis}(-\varphi) (-3r^{-4}) \text{cis}(-3\varphi)$$

$$= -3r^{-4} \text{cis}(-4\varphi)$$

3.4 Aturan Pendiferensialan

Jika f(z), g(z) dan h(z) adalah fungsi- fungsi kompleks serta f'(z), g'(z) dan h'(z) ada, maka berlaku rumus-rumus :

1. $\frac{dc}{dz} = 0, \quad \frac{d(z)}{dz} = 1$
2. $\frac{d[cf(z)]}{dz} = cf'(z)$
3. $\frac{d}{dx}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$
4. $\frac{d}{dx}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$

6. $\dfrac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$

7. Jika $h(z) = g[f(z)]$ maka $h'(z) = g'[f(z)]f'(z)$

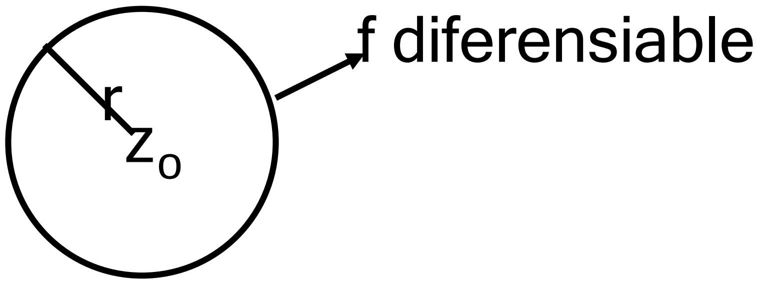
biasa disebut dengan komposisi (aturan rantai)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dz}$$

3.5 Fungsi Analitik

Definisi 3.5.1

Fungsi f analitik di z_o, jika ada $r > 0$ sedemikian, hingga $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in N(z_o,r)$ (persekitaran z_o)



Fungsi analitik untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dinamakan **fungsi utuh**

Contoh 3.5.1

1. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ analitik kecuali di $z = 0$
2. $f(z) = x^3 + iy^3$

   diperoleh : $u = x^3$; $v = y^3$ sehingga

   $u_x = 3x^2$; $v_x = 0$; $u_y = 0$; $v_y = 3y^2$

   dengan menggunakan persamaan C-R :

   $3x^2 = 3y^2 \Rightarrow y = \pm x$ dan $v_x = u_y = 0$

   persamaan C-R dipenuhi dan kontinu digaris $y = \pm x$

   berarti $f'(z)$ ada hanya di $y = \pm x$

   Jadi $f(z)$ tidak analitik dimanapun karena tidak ada kitar.

Sifat sifat analitik

Misalnya f dan g analitik pada D, maka :

- $f \pm g$ merupakan fungsi analitik
- fg merupakan fungsi analitik
- f/g merupakan fungsi analitik dengan $g \neq 0$
- $h = g \circ f$ merupakan fungsi analitik
- berlaku aturan L'hospital yaitu :

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}, \quad \text{dengan } g(z) \neq 0 \;\; g'(z) \neq 0$$

3.6 Titik Singular

Definisi 3.6.1

Titik z_1 disebut titik singular dari f jika f tidak analitik di z_1 tetapi untuk setiap kitar dari z_1 memuat paling sedikit satu titik dimana f analitik.

Jenis kesingularan f(z) atau titik singular antara lain :

1. **Titik singular terisolasi**

Titik z_o dinamakan **titik singular terisolasi** dari f(z) jika terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga lingkaran $|z - z_o| = \delta$ hanya melingkari titik singular lainnya. Jika δ seperti itu tidak ada, maka $z = z_o$ disebut **titik singular tidak terisolasi.**

2. Titik Pole (titik kutub)

Titik $z = z_o$ disebut titik pole tingkat n, jika berlaku

$$\lim_{z \to z_o} (z - z_o)^n f(z) = A \neq 0 \quad .$$

Jika n = 1, z_o disebut sebagai titik pole sederhana.

3. Titik Cabang

Dari fungsi bernilai banyak dapat menjadi titik singular.

4. Titik Singular dapat dihapuskan

Titik singular z_o disebut **titik singular dapat dihapuskan** dari f(z) jika $\lim_{z \to o} f(z)$ ada.

5. Titik Singular Essensial

Titik singular $z = z_o$ yang tidak memenuhi syarat titik singular pole titik cabang atau titik singular yang dapat dihapuskan disebut **titik singular essensial.**

6. Titik Singular tak hingga

Jika $f(z)$ mempunyai titik singular di $z = \infty$, maka sama dengan menyatakan $f(1/w)$ mempunyai titik singular di $w = 0$.

Contoh 3.6.1

- $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ berarti titik z = i adalah titik pole tingkat 2 dari g(z)
- $h(z) = |z|^2$ tidak merupakan titik singular
- $k(z) = \ln(z^2 + z - 2)$ maka titik cabang adalah $z_1 = 1$ dan $z_2 = -2$ karena $(z^2 + z - 2) = (z - 1)(z + 2) = 0$

3.7 Fungsi Harmonik

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada D maka u dan v mempunyai derivatif parsial di semua orde yang kontinue pada D. Jadi dalam D berlaku C-R , $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

Karena derifatif-derivatif parsial dari u dan v kontinu dalam D, maka berlaku $v_{xy} = v_{yx}$. Jika dalam $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ diderivatifkan parsial terhadap x dan y maka $\forall(x,y) \in D$ berlaku

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$v_{xx} = v_{yy} = 0$$

Jika f analitik pada D maka u dan v pada D memenuhi **persamaan differensial Laplace** dalam 2 dimensi.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

u dan v dimana f(z) = u(x,y) + iv(x,y) analitik pada suatu domain maka **f(z) harmonik** pada domain tersebut.

Dua fungsi u dan v sedemikian sehingga

f(z) = u(x,y) + iv(x,y) analitik dalam suatu domain dinamakan **dua fungsi yang harmonik konjugat** dalam domain itu.

Contoh 3.7.1

Diberikan u(x,y) harmonik pada D dan tentukan fungsi v yang harmonik konjugat dengan $u = 4xy^3 - 4x^3y$, $(x,y) \in \mathbb{C}$

Jawab :

Misal diklaim konjugatnya adalah v(x,y)

jadi f(z) = u(x,y) + iv(x,y) analitik pada $\mathbb{C}$ sedemikian sehingga berlaku C-R $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

$$\left.\begin{aligned} u_x &= 4y^3 - 12x^2y \\ u_y &= 12xy^2 - 4x^3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} v_y &= 4y^3 - 12x^2y \\ v &= y^4 - 6x^2y^2 + g(x) \end{aligned}$$

karena $v_x = -u_y$ maka $-12xy^2 + g'(x) = -12xy^2 + 4x^3$ sehingga $g'(x) = 4x^3$ diperoleh $g(x) = x^4 + C$

Jadi $v = y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + C$

Cara Milne Thomson

Cara yang lebih praktis menentukan fungsi harmonik konjugat atau dari fungsi harmonik u diberikan u(x,y) harmonik pada D andaikan v(x,y) sehingga

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada D

$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$

sesuai persamaan C-R : $f'(z) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$

$z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$ sehingga diperoleh

$x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ dan $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

$$f(z) = u_x\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - iu_y\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

Suatu identitas dalam z dan $\bar{z}$, jika diambil $\bar{z} = z$ maka

$f'(z) = u_x(z,0) - iu_y(z,0)$

Jadi f(z) adalah fungsi yang derivatifnya $u_x(z,0) - iu_y(z,0)$

kemudian didapat v(x,y)

Contoh 3.7.2

Dari Contoh 3.7.1 dengan u= $4xy^3 - 4x^3y$, $(x,y) \in \mathbb{C}$, jika diselesaikan dengan menggunakan cara Milne Thomson.

Jawab :

$u_x = 4y^3 - 12x^2y$

$u_y = 12xy^2 - 4x^3$

$f'(z) = u_x(z,0) - iu_y(z,0)$

$= -i(-4z^3)$

$= 4iz^3$

sehingga $f(z) = iz^4 + A$

$f(z) = i(x + iy)^4 + A$

$= 4xy^3 - 4x^3y + i(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + A$