MATEMATIKA TEKNIK 1

3 SKS

TEKNIK ELEKTRO

UDINUS

4. INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS

Seperti halnya dalam fungsi riil, dalam fungsi kompleks juga dikenal istilah integral fungsi kompleks serta sifat-sifatnya. Sifat keanalitikan suatu fungsi dalam suatu lintasan tertutup penting dalam perhitungan integral. Setelah membaca Bab 4, mahasiswa diharapkan dapat :

- Menghitung integral lintasan kompleks.
- Menggunakan teorema Cauchy Goursat dan rumus integral Cauchy dalam perhitungan integral
- Menggunakan turunan fungsi analitik untuk menghitung integral

4.1 Fungsi Kompleks dari Variabel Riil

Misalkan $F(t)$ adalah fungsi kompleks dari variabel riil t , ditulis sebagai $F(t) = u(t) + i\, v(t)$ dengan $u(t)$ dan $v(t)$ adalah fungsi riil. Jika $u(t)$ dan $v(t)$ kontinu pada interval tertutup $a \le t \le b$, maka

$$\int_a^b F(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt .$$

Sifat-sifat

1. $\operatorname{Re}\left(\int_a^b F(t)\, dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(F(t))\, dt$
2. $\operatorname{Im}\left(\int_a^b F(t)\, dt \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(F(t))\, dt$
3. $\int_a^b k\, F(t)\, dt = k \int_a^b F(t)\, dt$
4. $\int_a^b F(t)\, dt = -\int_b^a F(t)\, dt$
5. $\left| \int_a^b F(t)\, dt \right| = \int_a^b |F(t)|\, dt$

Pembuktian sifat-sifat integral di atas menggunakan sifat-sifat integral fungsi riil.

Bukti sifat 3 :

$$\int_a^b k\, F(t)\, dt = \int_a^b k[u(t) + i\, v(t)]\, dt$$

$$= \int_a^b k\, u(t)\, dt + \int_a^b k\ i\, v(t)\, dt$$

(sifat integral fungsi riil : $\int_a^b k\ f(x)\, dx = k \int_a^b f(x) dx$

$$= k \int_a^b u(t)\, dt + k \int_a^b i\, v(t)\, dt$$

$$= k \left\{ \int_a^b u(t)\,dt + \int_a^b i\,v(t)\,dt \right\}$$
$$= k \int_a^b F(t)\,dt \quad \text{(terbukti).}$$

Bukti sifat 4 :

$$\int_a^b F(t)\ dt = \int_a^b u(t)\ dt\ +\ i \int_a^b v(t)\ dt$$

(sifat integral fungsi riil : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$)

$$= -\int_b^a u(t)\ dt - i \int_b^a v(t)\ dt$$
$$= -\left\{ \int_b^a u(t)\ dt + i \int_b^a v(t)\ dt \right\}$$
$$= -\left\{ \int_b^a [u(t) + i\ v(t)]\ dt \right\}$$
$$= -\int_b^a F(t)\ dt \quad \text{(terbukti).}$$

4.2 Lintasan

Jika g dan h fungsi bernilai riil dan kontinu dari variabel t dalam interval tertutup $a \le t \le b$, maka himpunan titik-titik di bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk parametrik $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$. Oleh karena itu, himpunan titik-titik dalam bidang kompleks juga dapat dinyatakan dalam bentuk parametrik.

Definisi 4.1 Kurva di bidang datar merupakan kurva mulus (*smooth curve*) jhj kurva tersebut dapat dinyakan dengan dua fungsi bernilai riil

$$x = g(t)\ ,\ y = h(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$$

sedemikian sehingga $\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ dan $\dfrac{dy}{dt} = h'(t)$ ada dan kontinu dalam interval $\alpha \le t \le \beta$.

Contoh 1 Kurva dengan bentuk parametrik

$x = 2\cos t\ ,\ y = 2\sin t,\ \ 0 \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$ merupakan kurva mulus.

Jika C merupakan kurva mulus dengan bentuk parametrik :

$$x = g(t)\ ,\ y = h(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$$

maka

- titik pada C yang berpadanan dengan $t = \alpha$ disebut titik awal C.
- titik pada C yang berpadanan dengan $t = \beta$ disebut titik akhir C.

Selanjutnya, C disebut lintasan (*path*) bila C terdiri dari berhingga banyak kurva mulus,

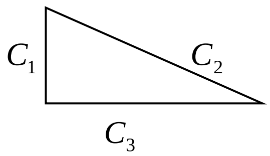
$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

dengan $C_1, C_2, \cdots, C_n$ merupakan kurva mulus. Pengertian lintasan ini sangat penting dalam integral fungsi kompleks karena berperan sebagai selang pengintegralan dalam integral fungsi riil dari satu variabel.

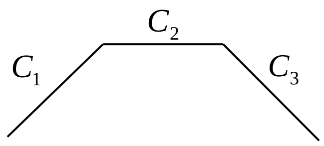
Catatan :

1. C disebut lintasan tertutup jika titik akhir C berhimpit dengan titik awal C.
2. C disebut lintasan terbuka jika titik akhir C tidak berhimpit dengan titik awal C.
3. C disebut lintasan sederhana jika lintasan tidak memotong dirinya sendiri.
4. C disebut lintasan berganda jika lintasan memotong dirinya sendiri.

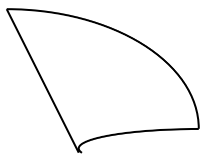
Contoh 2



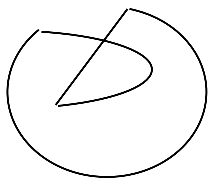
a. Lintasan tertutup



b. Lintasan terbuka



c. Lintasan sederhana



d. Lintasan berganda

Teorema 4.1 (Kurva Jordan)

Jika C lintasan tertutup sederhana di bidang datar, maka bidang datar itu dibagi oleh C menjadi 3 bagian, yaitu

1. kurva C.
2. bagian dalam C, ditulis $Int(C)$, yang merupakan himpunan terbuka dan terbatas.
3. bagian luar C, ditulis $Ext(C)$, yang merupakan himpunan terbuka dan tidak terbatas.

Kurva C merupakan batas dari himpunan $Int(C)$ dan $Ext(C)$.

4.3 Integral Garis

Misalkan kurva mulus C disajikan dengan $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$. $g(t)$ dan $h(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. $g'(t)$ dan $h'(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. Kurva C mempunyai arah dari titik awal $A(g(a), h(a))$ ke titik akhir $B(g(b), h(b))$ dan $P(x, y)$ suatu fungsi yang terdefinisi di C.

Teorema 4.2

1. Jika $P(x,y)$ kontinu di C, maka $\int_C P(x,y)\,dx$ dan $\int_C P(x,y)\,dy$ ada dan

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_a^b P[g(t),h(t)]\,g'(t)\,dt$$

$$\int_C P(x,y)\,dy = \int_a^b P[g(t),h(t)]\,h'(t)\,dt$$

2. $\int_A^B P(x,y)\,dx = -\int_B^A P(x,y)\,dx$

3. Jika $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$ kontinu di C, maka

$$\int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dx = \int_C \{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx\}.$$

Teorema 4.3

Jika $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$ serta turunan parsial tingkat pertama kontinu pada seluruh daerah tertutup R yang dibatasi lintasan tertutup C, maka

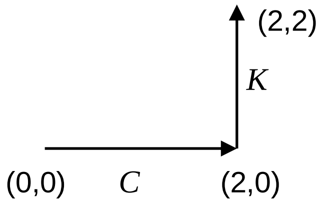
$$\oint_C \{P\ dx + Q\ dy\} = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy\ .$$

Contoh 3

Tentukan integral garis fungsi $M(x,y) = x + y$ sepanjang lintasan $C + K$ dengan

C : garis dari (0,0) ke (2,0) dan K : garis dari (2,0) ke (2,2).

Penyelesaian :



$C :\ y = 0\ ,\ 0 \le x \le 2$

$K : x = 2\ ,\ 0 \le y \le 2$

Pada kurva C : $dy = 0$ dan pada kurva K : $dx = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{C+K} M(x,y)\,dx &= \int_C M(x,y)\,dx + \int_K M(x,y)\,dx \\ &= \int_C (x+y)\,dx \\ &= \int_0^2 x\ dx \\ &= 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C+K} M(x,y)\,dy &= \int_C M(x,y)\,dy + \int_K M(x,y)\,dy \\ &= \int_K (x+y)\,dy \\ &= \int_0^2 (2+y)\ dy \\ &= 6.\end{aligned}$$

4.4 Integral Lintasan Kompleks

Diberikan lintasan C dalam bentuk parametrik $x = g(t)$, $y = h(t)$ dengan $a \le t \le b$. $g(t)$ dan $h(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. $g'(t)$ dan $h'(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. Jika $z = x + i\,y$, maka titik-titik z terletak C. Arah pada kurva C $(g(a), h(a))$ ke $(g(b), h(b))$ atau dari $z = \alpha$ sampai $z = \beta$ dengan $\alpha = (g(a), h(a))$ dan $\beta = (g(b), h(b))$.

Definisi 4.2 Diberikan fungsi $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ dengan u dan v fungsi dari t yang kontinu sepotong-potong pada $a \le t \le b$. Integral fungsi $f(z)$ sepanjang lintasan C dengan arah dari $z = \alpha$ sampai $z = \beta$ adalah

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_a^b f\left[g(t) + i\,h(t)\right]\left\{g'(t) + i\,h'(t)\right\} dt$$

Sifat-sifat

1. $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = -\int_\beta^\alpha f(z)\,dz$
2. $\int_C k\,f(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$
3. $\int_C \left[f(z) + g(z)\right] dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

Contoh 4

Hitung $\int_\gamma z e^{z^2}\,dz$ jika γ : garis lurus dari $z_0 = i$ ke $z_1 = 2 + i$.

Penyelesaian :

$z_0 = i \longrightarrow z_1 = 2 + i$

(0,1) (2,1)

Persamaan garis γ : $y = 1$ dan mempunyai bentuk parametrik :

$$\begin{aligned} x &= g(t) = t \\ y &= h(t) = 1 \end{aligned} \quad , \quad t \in [0, 2] \qquad (4.1)$$

Dari (4.1) diperoleh :

$$z = g(t) + i\,h(t) = t + i$$

$$dz = \{g'(t) + i\,h'(t)\}dt = 1.\,dt$$

Karena $f(z) = z e^{z^2}$ maka $f\left[g(t) + i\,h(t)\right] = f(t+i) = (t+i)\,e^{(t+i)^2}$.

Sehingga,

$$\int_\gamma z e^{z^2}\,dz = \int_0^2 (t+i)e^{(t+i)^2}\,1\,dt$$

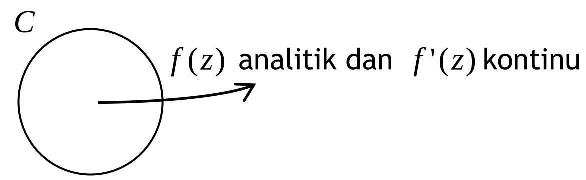
$$= \int_0^2 (t+i)\,e^{(t+i)^2} dt \quad \text{(gunakan subtitusi : } u = (t+i)^2\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{3+4i} - e^{-1}\right].$$

4.5 Pengintegralan Cauchy

Teorema 4.4 (Teorema Cauchy)

Jika $f(z)$ analitik dan $f'(z)$ kontinu di dalam dan pada lintasan tertutup sederhana C, maka $\oint_C f(z)\,dz = 0$.



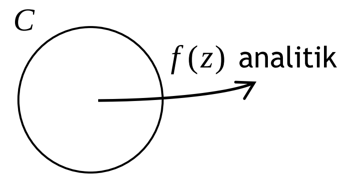
Contoh 4

Misalkan diberikan C sebarang lintasan tertutup dalam bidang kompleks.

1. $f(z) = z^2 \longrightarrow \oint_C z^2\,dz = 0$.
2. $f(z) = 1 \longrightarrow \oint_C dz = 0$.

Teorema 4.5 (Teorema Cauchy-Goursat)

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan tertutup sederhana C, maka $\oint_C f(z)\,dz = 0$.



Contoh 5

Diketahui $C : |z| = 1$. Hitunglah $\int_C f(z)\,dz$ jika $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$.

Penyelesaian :

$f'(z) = -\dfrac{1}{(z-3)^2}$, $f(z)$ tidak analitik di $z = 3$ dan $z = 3$ terletak di luar C.

Oleh karena itu, $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan C, sehingga $\oint_C \dfrac{1}{(z-3)}\,dz = 0$.

Teorema 4.6 (Bentuk lain Teorema Cauchy Goursat)

Jika fungsi $f(z)$ analitik di seluruh domain terhubung sederhana D, maka untuk setiap lintasan tertutup C di dalam D, berlaku $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

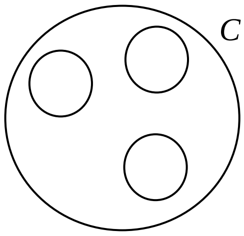
Teorema 4.7 (Teorema Cauchy

Diberikan suatu lintasan tertutup C, sedangkan $C_1, C_2, \ldots, C_n$ adalah lintasan-lintasan tertutup yang terletak

Goursat yang diperluas)

di interior C sedemikian sehingga $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tidak saling berpotongan. Jika fungsi $f(z)$ analitik di dalam daerah tertutup yang terdiri dari titik-titik pada C dan titik-titik di dalam C, kecuali titik-titik interior $C_1, C_2, \ldots, C_n$, maka

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$



Contoh 6

Hitung $\int_C \dfrac{dz}{(z-3)}$, jika $C : |z-2| = 2$.

Penyelesaian :

$f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ tidak analitik di $z = 3$ yang berada di dalam interior C. Dibuat lintasan tertutup C_1 di dalam C berpusat di $z = 3$ yaitu $C_1 : |z-3| = \dfrac{1}{2}$. Diperoleh $z = 3 + \dfrac{1}{2}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ dan $dz = \dfrac{1}{2}e^{it}\,dt$.

Menurut Teorema Cauchy Goursat yang diperluas,

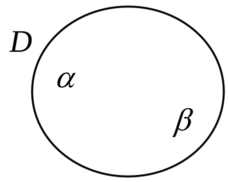
$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{(z-3)} &= \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-3)} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} i e^{it}\,dt}{\frac{1}{2}e^{it}} \\ &= i\int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

4.6 Integral Tak Tentu dan Integral Tentu

Jika fungsi f analitik di dalam domain terhubung sederhana D, maka $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ mempunyai turunan untuk setiap titik z di dalam D dengan $F'(z) = f(z)$, asalkan lintasan pengintegralan dari z_0 ke z seluruhnya terletak di dalam D. Jadi $F(z)$ juga analitik di dalam D.

Teorema 4.8 Jika α dan β di dalam D, maka

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha).$$



$f(z)$ analitik

Contoh 7

$$\int_{i}^{2+i} z\, dz = \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{i}^{2+i} = 2 + 2i\,.$$

(Karena $f(z) = z$ merupakan fungsi utuh, maka dapat dibuat sebarang domain terhubung sederhana D yang memuat lintasan pengintegralan dari $z = i$ ke $z = 2 + i$).

4.7 Rumus Integral Cauchy

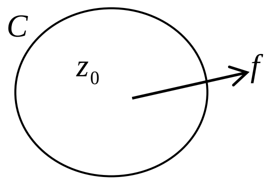
Teorema 4.9 (Rumus Integral Cauchy)

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan tertutup C dan z_0 sebarang titik di dalam C, maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

atau

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\,.\, f(z_0)\,.$$



$f(z)$ analitik

Turunan Fungsi Analitik

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz = 2\pi i\,.\, f'(z_0)$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\, dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\,.\, f''(z_0)$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!}\,.\, f^{n}(z_0)$$

Contoh 8

1. Hitung $\oint_C \frac{dz}{z - 3}$ dengan $C : \left| z - 2 \right| = 2$.

   Penyelesaian :

   Diambil : $f(z) = 1$ ($f(z)$ analitik di dalam dan pada C)

   $z_0 = 3$ di dalam C.

$f(z_0) = f(3) = 1$

Menggunakan rumus integral Cauchy, diperoleh

$$\oint_C \frac{dz}{z-3} = 2\pi i . f(z_0) = 2\pi i . 1 = 2\pi i .$$

2. Hitung $\oint_C \dfrac{dz}{z^3\ (z-2)^2}$ dengan $C : \left| z-3 \right| = 2$.

Penyelesaian :

Diambil : $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$ ($f(z)$ analitik di dalam dan pada C)

$z_0 = 2$ di dalam C.

$$f'(z) = -\frac{3}{z^4} \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = f'(2) = -\frac{3}{16}.$$

Menggunakan turunan fungsi analitik, diperoleh

$$\oint_C \frac{dz}{z^3 (z-2)^2} = \frac{2\pi i}{1!} . f'(z_0) = \frac{2\pi i}{1} .(-\frac{3}{16}) = -\frac{3}{8}\pi i .$$

4.8 Teorema Morera dan Teorema Liouville

Teorema 4.10 (Teorema Morera)

Jika $f(z)$ kontinu dalam domain terhubung D dan untuk setiap lintasan tertutup C dalam D berlaku $\int_C f(z)\, dz = 0$, maka $f(z)$ analitik di seluruh D.

Teorema 4.11 (Teorema Liouville)

Jika $f(z)$ analitik dan $|f(z)|$ terbatas di seluruh bidang kompleks, maka $f(z)$ adalah suatu fungsi konstan.

4.9 Teorema Modulus Maksimum

Jika $f(z)$ analitik dan M nilai maksimum dari $|f(z)|$ untuk z di dalam daerah $D = \{ z : |z - z_0| \le r \}$, dan jika $| f(z_0) | = M$, maka $f(z)$ konstan di seluruh daerah D. Akibatnya, jika $f(z)$ analitik dan tidak konstan pada D, maka $| f(z_0) | < M$.

Prinsip Modulus Maksimum

Jika fungsi tak konstan $f(z)$ analitik di z_0, maka di setiap kitar dari z_0, terdapat titik z dan $| f(z_0) | < | f(z) |$.

Teorema 4.12 (Teorema Modulus Maksimum)

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan tertutup sederhana C, dan $f(z)$ tidak konstan, maka $|f(z)|$ mencapai nilai maksimum di suatu titik pada C, yaitu pada perbatasan daerah itu dan tidak di titik interior.

Teorema 4.13 (Ketaksamaan Cauchy)

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan tertutup sederhana $C : \left| z - z_0 \right| = r$, dan $f(z)$ terbatas pada C, $\left| f(z) \right| \le M$, $\forall z \in C$ maka $\left| f^n(z_0) \right| \le \dfrac{n!M}{r^n}$, $n = 0,1,2,\ldots$

.

Ringkasan

Sifat keanalitikan fungsi kompleks di dalam dan pada suatu lintasan tertutup merupakan hal yang harus diperhatikan dalam perhitungan integral fungsi kompleks.

Soal-soal

1. Hitung $\int_{\gamma} z e^{z^2} \, dz$ jika γ : kurva $y = x^2$ dari $z_0 = 0$ ke $z_1 = 1 + i$.
2. Hitung $\int_{C} f(z) dz$ jika $f(z) = z^3$ dengan C: setengan lingkaran $|z| = 2$ dari $z = -2i$ ke $z = 2i$.
3. Hitung integral fungsi $f(z)$ sepanjang lintasan tertutup C berikut :

   a. $f(z) = \dfrac{z e^z}{(4z + \pi i)^2}$, $C : |z| = 1$ (*counterclockwise*).

   b. $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2 (z^2 + 4)}$, C: ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ (*counterclockwise*).

   c. $f(z) = \dfrac{Ln(z+3) + \cos z}{(z+1)^2}$, C: segiempat dengan titik-titik sudut $z = \pm 2$ dan $z = \pm 2i$ (*counterclockwise*).

   d. $f(z) = \dfrac{2z^3 - 3}{z(z-1-i)^2}$, C: terdiri dari $|z| = 2$ (*counterclockwise*) dan $|z| = 1$ *(clockwiswe).*

   e. $f(z) = \dfrac{(1+z)\sin z}{(2z-1)^2}$, $C : |z - i| = 2$ (*counterclockwise*).

   f. $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}$, C: segiempat dengan titik-titik sudut $z = \pm 3 \pm 3i$ (*counterclockwise*) dan $|z| = 1$ *(clockwiswe).*

   g. $f(z) = \dfrac{z^3 + \sin z}{(z-i)^3}$, C: segitiga dengan titik-titik sudut $z = \pm 2$, $z = 2i$ (*counterclockwise*).