Matriks dan Ruang Vektor

Invers Matriks

Invers Matriks

- Definisi :

  Jika A dan B adalah sebarang matriks bujur sangkar sedemikian sehingga AB=BA=I. Maka B merupakan invers dari A atau A^{-1} dan sebaliknya. Matriks yang mempunyai invers disebut invertible atau non singular.

- Untuk mendapatkan A^{-1}, dapat dilakukan dengan cara :

  1. Metode Matriks Adjoint / Determinan
  2. Metode Transformasi Elementer Baris

Mencari Invers Matriks dengan Metode Matriks Adjoint / Determinan

Menentukan invers matriks menggunakan Metode Matriks Adjoint/Determinan

- Tentukan Minor matriks
- Tentukan kofaktor matriks
- Tentukan adjoin matriks
- Tentukan determinan matriks
- Hitung invers matriks

Invers Matriks Ukuran 2x2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Step-1 Cari determinan dari matriks 2x2 tersebut menggunakan rumus *ad-bc*

Step-2 Tukar elemen diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

Step-3 Kemudian buat negatif elemen lainnya

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Step-4 Terakhir kalikan dengan matriks tersebut dengan 1/determinan

$$\frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh

Cari invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Step 1 – Hitung Determinan matriks A = ad-bc = 4x3 – 8x1 = 4

Step 2 – Tukar elemen diagonal utamanya

$$\textbf{step2} \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Step 3 – Negatifkan elemen lainnya

$$\textbf{step3} \quad \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Step 4 – Kalikan dengan 1/determinan

$$\textbf{step4} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.75 & -2 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

check

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & -2 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & -8+8 \\ 0.75-0.75 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitung Invers Matriks Berikut

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & -1.5 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} -5 & 20 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -20 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -2 \\ 0.1 & -0.5 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad C^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Cari invers matriks berikut

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Invers Matriks Ukuran 3x3 ke atas

- Contoh

  Tentukan Invers matriks A berikut menggunakan metode matriks ajoin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

- Tentukan Minor Matriks

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-3)(2) - (1)(2) = -6 - 2 = -8$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (1)(-1) = 4 + 1 = 5$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-3)(-1) = 4 - 3 = 1$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-5)(2) - (0)(2) = -10 - 0 = -10$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (0)(-1) = 6 - 0 = 6$$

Penyelesaian-lanj

- Tentukan Kofaktor Matriks = $\mathbf{C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M^{ij}}$

a.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = (1)(-8) = -8$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12} = (-1)(5) = -5$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\ M_{13} = (1)(1) = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)(-10) = 10$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22} = (1)(6) = 6$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\ M_{23} = (-1)(1) = -1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\ M_{31} = (1)(1) = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\ M_{32} = (-1)(3) = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\ M_{33} = (1)(1) = 1$$

Matriks kofaktornya : $C = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 10 & 6 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian-lanj

- Tentukan Determinan Matriks

Karena matriks A ukuran 3x3, determinan dapat dicari menggunakan metode Sarrus.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Det(A) = 3x(-3)x2 + (-5)x1x(-1) + 0x2x2 – (-1)x(-3)x0 – 2x1x3 - 2x2x(-5)

Det(A) = -18 + 5 + 0 - 0 – 6 + 20 = 1

Penyelesaian-lanj

- Tentukan Ajoin Matriks

  Ajoin matriks A adalah transpos dari kofaktor matriks A.

$$\text{kofaktor } C = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 10 & 6 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{adjoin nya } adj(A) = \begin{bmatrix} -8 & 10 & 1 \\ -5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian-lanj

- Tentukan Invers Matriks

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -8 & 10 & 1 \\ -5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 10 & 1 \\ -5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mencari Invers Matriks Menggunakan Metode Transformasi Elementer Baris

Langkah-langkah Transformasi Elementer Baris (Operasi Baris Elementer)

1) Bentuklah matriks $(A_n \mid I_n)$, dengan I_n adalah matriks identitas ordo n.
2) Transformasikan matriks $(A_n \mid I_n)$ ke bentuk $(I_n \mid B_n)$, dengan transformasi elemen baris.
3) Hasil dari Langkah 2, diperoleh invers matriks A_n adalah B_n.

Contoh

- Tentukan invers matriks A berikut menggunakan transformasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$(A_3 \mid I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{B_3 - B_1}{\overset{B_2 - 2B_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{B_3 + B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\tfrac{1}{5}B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{B_2 - 2B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{B_1 - B_2} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Jadi, diperoleh $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Latiahan

Tentukan invers matriks berikut

- A = $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$
- B = $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$
- C = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

D = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

E = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$