BARISAN DAN DERET

BARISAN

Barisan Tak Hingga

Kekonvergenan barisan tak hingga

Sifat – sifat barisan

Barisan Monoton

Barisan Tak Hingga

Secara sederhana, barisan merupakan susunan dari bilangan −bilangan yang urutannya berdasarkan bilangan asli.

Suatu barisan yang terdiri dari n suku biasanya dinyatakan dalam bentuk $a_1, a_2, \ldots, a_n$. a_1 menyatakan suku ke–1, a_2 menyatakan suku ke–2 dan a_n menyatakan suku ke–n.

Barisan tak hingga didefinisikan sebagai suatu fungsi real di mana daerah asalnya adalah bilangan asli. Notasi barisan tak hingga adalah

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Barisan Tak Hingga

Contoh − contoh barisan

Barisan

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

Bisa dituliskan dengan rumus $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$

Barisan

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$$

Bisa dituliskan dengan rumus $\left\{\dfrac{n}{2+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Penentuan a_n tidak memiliki aturan khusus dan hanya bersifat coba–coba.

Kekonvergenan barisan tak hingga

Suatu barisan tak hingga dikatakan konvergen menuju L, bila

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

atau

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 \ni n \ge N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

{ untuk setiap epsilon positif terdapat N positif sedemikian hingga untuk n lebih besar atau sama dengan N, selisih antara a_n dan L akan kurang epsilon}

Kekonvergenan barisan tak hingga

Contoh 1

Tentukan kekonvergenan dari barisan berikut

$$\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Jawaban

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$

maka $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ divergen

Kekonvergenan barisan tak hingga

Contoh 2

Tentukan kekonvergenan dari barisan berikut

$$\left\{ \frac{n^2}{e^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Jawaban

Karena $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \to \frac{\infty}{\infty}$ merupakan bentuk tak tentu maka untuk menyelesaikannya digunakan teorema berikut :

Misal $a_n = f(n)$,bila $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ maka $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$

untuk $x \in R$.

Kekonvergenan barisan tak hingga

Jawaban (lanjutan)

Jadi $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ dan dengan menggunakan dalil L'hopital maka

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Berdasarkan teorema maka $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$.

Karena nilai limitnya menuju 0, maka

$$\left\{ \frac{n^2}{e^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Konvergen menuju 0.

Kekonvergenan barisan tak hingga

Contoh 3

Tentukan kekonvergenan dari barisan berikut

$$\left\{\frac{1}{n}\cos n\pi\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Jawaban

Bentuk dari suku −suku barisannya merupakan bentuk ganti tanda akibat dari nilai *cos n*π, untuk n ganjil tandanya − , untuk n genap tandanya +. Nilai $\lim_{n\to\infty}\cos n\pi$ tidak ada tetapi minimal bernilai –1 dan maksimal bernilai 1. Sedangkan $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ akibatnya untuk n→∞ nilai $\frac{1}{n}.\cos n\pi$ akan mendekati nol. Jadi deret konvergen menuju 0.

Sifat – sifat barisan

Misal $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ barisan-barisan yang konvergen, dan k suatu konstanta, maka

1. $\lim_{n\to\infty} k = k$
2. $\lim_{n\to\infty} k\, a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Barisan Monoton

Kemonotonan barisan $\{a_n\}$ dapat dikelompokkan menjadi 4 macam :

1. Monoton naik bila $a_n < a_{n+1}$
2. Monoton turun bila $a_n > a_{n+1}$
3. Monoton tidak turun bila $a_n \leq a_{n+1}$
4. Monoton tidak naik bila $a_n \geq a_{n+1}$

Deret Tak Hingga

Deret tak hingga merupakan jumlahan dari $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ yaitu $a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Notasi deret tak hingga adalah $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Kekonvergenan suatu deret dapat di ketahui dari kekonvergenan barisan jumlahan parsial yaitu , $\lim_{n\to\infty} S_n$,dimana :

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Dan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

Deret Tak Hingga

Contoh

Selidiki apakah deret $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ konvergen ?

Jawaban

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Karena $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ adalah deret konvergen yaitu konvergen menuju 1. Penentuan Sn dari suatu deret juga tidak memiliki aturan khusus dan bersifat coba – coba.

Deret Suku Positif

Sebuah $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut deret suku positif, bila semua suku-sukunya positif. Berikut ini adalah deret-deret suku positif yang sering digunakan :

1. Deret geometri
2. Deret harmonis
3. Deret-p

Deret–p akan dibahas secara khusus dalam uji integral

Deret Suku Positif

Deret geometri

Bentuk umum : $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots$

Proses menentukan rumusan S_n adalah sebagai berikut :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

Dari rumusan tersebut diperoleh bahwa $S_n - rS_n = a - ar^n$ sehingga $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ untuk r ≠ 1. Kekonvergenan dari deret geometri bergantung pada nilai r.

Deret Suku Positif

Deret geometri(lanjutan)

Ada 3 kasus nilai r yang akan menentukan kekonvergenan deret geometri :

–Bila *r = 1*, maka $S_n = na$ sehingga $\lim_{n\to\infty} na = \infty$, sehingga deret divergen

–Bila | r |<1, maka $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, sehingga deret konvergen ke $\dfrac{a}{1-r}$

–Bila | r | >1, maka $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$, sehingga deret divergen

Deret Suku Positif

Deret harmonis

Bentuk umum : $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Untuk menentukan kekonvergenan, dapat diketahui dari nilai limit dari S_n nya, yaitu

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

Deret Suku Positif

Deret harmonis (lanjutan)

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{n}{2}$$

Karena, maka $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{n}{2} = \infty$. Sehingga deret harmonis divergen.

Kedivergenan Deret Tak Hingga

Bila deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ kontraposisinya (pernyataan lain yang sesuai) adalah

Bila $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$,maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ akan divergen.

Bila dalam perhitungan limit a_n–nya diperoleh nol, maka deret belum tentu konvergen, sehingga perlu dilakukan pengujian deret dengan uji-uji deret positif.

Kedivergenan Deret Tak Hingga

Contoh

Periksa apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ konvergen ?

Jawaban

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Jadi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ divergen

Uji Deret Positif

1. Uji integral
2. Uji Banding
3. Uji Banding limit
4. Uji Rasio
5. Uji Akar

Uji Deret Positif

Uji integral

Misal $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ merupakan deret suku positif dan monoton turun, dimana $a_n = f(n) \geq 0$, maka integral tak wajar dari *f(x)* adalah $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} f(x)\,dx$.

Bila nilai limit dari integral tak wajar tersebut tak hingga atau tidak ada, maka deret divergen.

Bila nilainya menuju suatu nilai tertentu(ada), maka deret konvergen.

Deret Suku Positif

Contoh 1: Uji Integral Deret–p

Bentuk umum : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Kalau diperhatikan maka deret harmonis sebenarnya juga merupakan deret–p dengan p=1. Kekonvergenan deret p akan bergantung pada nilai p. Untuk menentukan pada nilai p berapa deret konvergen atau divergen, digunakan integral tak wajar yaitu

Misal $a_n = f(n) = \frac{1}{n^p}$ maka $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

Selanjutnya nilai $f(x)$ tersebut di integralkan dengan batas 1 sampai ∞.

Deret Suku Positif

Deret–p (lanjutan)

Integral tak wajar dari *f*(*x*) adalah

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)$$

Kekonvergenan deret–p ini akan tergantung dari nilai integral tak wajar tersebut. Bila integralnya konvergen maka deretnya juga konvergen. Sebaliknya bila integralnya tak hingga atau tidak ada maka deretnya juga akan divergen.

Deret Suku Positif

Deret–p (lanjutan)

Nilai integral tak wajar tersebut bergantung pada nilai p berikut :

– Bila p = 1, maka deretnya harmonis, sehingga deret divergen

– Bila $0 \le p < 1$, maka $\lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \infty$,sehingga deret divergen

– Bila $p > 1$, maka ,

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-p)b^{p-1}} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

sehingga deret konvergen.

Uji Deret Positif

Contoh 2

Tentukan kekonvergenan deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Jawaban

Deret tersebut monoton turun, sehingga dapat digunakan uji integral yaitu :

Misal $a_n = f(n) = \frac{1}{n \ln n}$, maka $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Perhitungan integral tak wajar :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to \infty} \ln(\ln x) \Big]_2^b = \infty$$

Uji Deret Positif

Karena nilai limitnya menuju tak hingga, maka integral tak wajarnya divergen. Sehingga deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ juga divergen.

Uji Deret Positif

Uji Banding

Bila untuk $\forall n \geq N$, berlaku $b_n \geq a_n$ maka

a. Bila $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen

b. Bila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ juga divergen

Jadi pada uji banding ini, untuk menentukan kekonvergenan suatu deret, bila menggunakan sifat a maka deret pembandingnya adalah yang bersifat konvergen.

Sedangkan bila menggunakan sifat nomor 2 maka deret pembandingnya adalah yang bersifat divergen.

Uji Deret Positif

Contoh 1

Uji kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

Jawaban

Dalam uji banding, pemilihan deret pembanding adalah dipilih yang paling mirip dengan deret yang akan diuji.

Dapat dipilh $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}}$ sebagai deret pembanding.

Karena $\frac{1}{\sqrt{n+2}} \geq \frac{1}{3\sqrt{n}}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}}$ merupakan deret p yang divergen, maka disimpulkan deretnya juga divergen

Uji Deret Positif

Contoh 2

Uji kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+5}$

Jawaban

Dengan uji banding, digunakan deret pembanding $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$,
dimana $\frac{3}{n^2+5} \le \frac{3}{n^2}$. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ merupakan deret

konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+5}$ juga konvergen.

Uji Deret Positif

Contoh 3

Uji kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg^{-1}n}{n^2}$

Jawaban

Karena untuk $n \to \infty,\ tg^{-1}n < \frac{\pi}{2}$, maka deret pembanding yang digunakan adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi/2}{n^2}$ .Karena $\frac{tg^{-1}n}{n^2} \le \frac{\pi/2}{n^2}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi/2}{n^2}$

merupakan deret konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg^{-1}n}{n^2}$ juga konvergen

Uji Deret Positif

Uji Banding Limit

Misal $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, merupakan deret suku positif dan $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ berlaku

- Bila $0 < L < \infty$, maka kedua deret bersama-sama konvergen atau bersama-sama divergen
- Bila $L = 0$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen
- Bila $L = \infty$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen

Uji Deret Positif

Contoh 1

Uji kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^3+n^2+3}$

Jawaban

Deret pembanding yang digunakan adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ dan diketahui sebagai deret divergen (sebagai $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

Karena $L = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3}{5n^3+n^2+3} =$ dan deret pembandingnya divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^3+n^2+3}$ juga divergen.

Uji Deret Positif

Contoh 2

Uji kekonvergenan deret $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}$

Jawaban

Deret pembanding yang digunakan adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dan diketahui sebagai deret divergen (deret harmonis).

Karena $L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+5}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+5}} = 1$ dan deret pembandingnya divergen, maka kedua deret bersama-sama divergen .

Uji Deret Positif

Uji Rasio

Misal $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ merupakan deret suku positif dan $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ maka berlaku

- Bila $\rho<1$, maka deret konvergen
- Bila $\rho>1$, maka deret divergen
- Bila $\rho=1$, maka uji gagal

Uji Deret Positif

Contoh

Uji kekonvergenan deret $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

Jawaban

Dengan uji rasio diperoleh [illegible]

Karena ρ = 0 < 1 , maka $\sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{n!}$ konvergen.

Uji Deret Positif

Uji Akar

Misal $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ merupakan deret suku positif dan $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

maka berlaku

- Bila $r < 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen
- Bila $r > 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen
- Bila $r = 1$, maka uji gagal

Uji Deret Positif

Contoh

Uji kekonvergenan deret $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^n}{e^n}$

Jawaban

Dengan uji akar diperoleh $r = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{e^n}} = \frac{2}{e}$

Karena $r = \frac{2}{e} < 1$, maka $\sum_{i=1}^{n} \frac{2^n}{e^n}$ konvergen.

Uji Deret Positif

Panduan Pemilihan uji deret

Bila deret suku berbentuk rasional (fungsi polinom) maka dapat dipilih **uji banding atau uji banding limit**

Bila deret suku positif mengandung bentuk pangkat n dan atau faktorial maka dipilih **uji rasio atau uji akar pangkat n**

Bila uji – uji diatas tidak dapat digunakan dan suku – sukunya monoton turun maka dapat dipilih **uji integral**

Deret Ganti Tanda

Uji-uji kekonvergenan deret positif hanya digunakan untuk menguji deret-deret positif. Sedangkan untuk deret-deret yang suku-sukunya berganti-ganti tanda, yaitu berbentuk . $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ dengan $a_n > 0$ untuk semua n dilakukan uji tersendiri.

Notasi deret ganti tanda adalah $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. atau . $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$

Deret ganti tanda dikatakan konvergen, bila

a. $0 \le a_{n+1} \le a_n$ (monoton tak naik)

b. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Deret Ganti Tanda

Contoh

Tentukan kekonvergenan deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{n(n+1)}$

Jawaban

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{n(n+1)}$ merupakan deret ganti tanda dengan rumus suku ke–nnya adalah $a_n=\dfrac{n+3}{n(n+1)}$.

Deret akan konvergen bila memenuhi dua syarat berikut :

a. $0<a_{n+1}\le a_n$

b. Nilai $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

Deret Ganti Tanda

a. $$0 \le \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \le \frac{n+3}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{n+3} \le$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+4)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+4n}{n^2+5n+6} \le$$

Karena $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ jadi $\{a_n\}$ adalah monoton tak naik.

b. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n(n+1)} = 0$$

Karena kedua syarat dipenuhi maka deretnya konvergen.

Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ dikatakan **konvergen mutlak**, bila deret mutlak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$ konvergen (suku a_n bisa berupa suku positif atau tidak).

Hal tersebut tidak berlaku sebaliknya. Tetapi bila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ juga divergen.

Kovergen bersyarat terjadi bila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergen.

Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Contoh 1

Tentukan apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^3}$ konvergen mutlak atau bersyarat ?

Jawaban

Deret mutlaknya adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n\pi}{n^3} \right|$. Dengan menggunakan uji banding, dimana deret pembandingnya adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ maka diperoleh bahwa $\left| \frac{\cos n\pi}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ untuk semua nilai n.

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ merupakan deret konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n\pi}{n^3} \right|$ juga konvergen. Sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^3}$ konvergen mutlak.

Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Contoh 2

Tentukan apakah $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!}$ konvergen mutlak atau bersyarat ?

Jawaban

Deret mutlaknya adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Dengan uji rasio diperoleh $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$.

Karena $\rho=0<1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergen.

Sehingga $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!}$ konvergen mutlak.

Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Contoh 3

Tentukan apakah $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergen mutlak atau bersyarat ?

Jawaban

Deret mutlaknya adalah $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ yang merupakan deret divergen.

Pengujian kekonvergenan deret ganti tanda

a. $0 \le a_{n+1} \le a_n$ (monoton tak naik)

Diperoleh bahwa $0 \le \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ benar

b. Jadi deret ganti tandanya konvergen.

Karena deret ganti tandanya konvergen sedangkan deret mutlaknya divergen maka $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ konvergen bersyarat

.

Uji rasio untuk kekonvergenan mutlak

Misal $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deret dengan suku tak nol dan $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, tiga kondisi yang mungkin terjadi adalah :

- Bila *r<1*, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen mutlak
- Bila *r>1*, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen
- Bila *r=1*, pengujian gagal (tidak dapat disimpulkan)

Konvergen bersyarat tidak bisa ditentukan oleh uji rasio ini. .

Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Contoh 1

Tentukan apakah $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{e^n}$ konvergen mutlak atau divergen?

Jawaban

Dengan uji rasio mutlak diperoleh :

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n^3} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^3}{n^3 e} \right| = \frac{1}{e}$$

Karena $r = \frac{1}{e} < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{e^n}$ konvergen mutlak.

Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Contoh 2

Tentukan apakah $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{2^n}$ konvergen mutlak atau divergen?

Jawaban

Dengan uji rasio mutlak diperoleh :

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)}{2} \right| = \infty$$

Karena *r* > *1*, maka $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{2^n}$ divergen .

Deret Pangkat

Bentuk umum :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1 (x-b) + a_2 (x-b)^2 + \ldots + a_n (x-b)^n + \ldots$$

Contoh deret pangkat

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4} + \frac{(x-1)^2}{5} + \ldots$$

Deret Pangkat

Pada deret pangkat ini, kalau diperhatikan terdapat dua variabel, yaitu *n* dan *x*. Untuk n , nilainya dari 0 sampai ∞, sedangkan nilai *x* dapat dicari dengan uji rasio untuk kekonvergenan mutlak, yaitu pada saat $r < 1$.

Interval nilai *x* yang memenuhi kekonvergenan dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ maupun $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ disebut interval kekonvergenan.

Bentuk interval kekonvergenan dari deret pangkat ini memiliki ciri khusus dan hanya memiliki 3 variasi bentuk untuk masing – masing deret.

Deret Pangkat

Tiga kemungkinan untuk interval kekonvergenan deret adalah :

Selang konvergensi untuk deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

- Deret konvergen hanya di $x = 0$
- Deret konvergen mutlak di $x \in R$
- Deret konvergen mutlak pada interval buka $(-r,r)$ atau ditambah pada ujung – ujung intervalnya.

Selang konvergensi untuk deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$

- Deret konvergen hanya di $x = b$
- Deret konvergen mutlak di $x \in R$
- Deret konvergen mutlak pada interval buka $(b-r,b+r)$ atau ditambah pada ujung – ujung intervalnya.

Deret Pangkat

Contoh 1

Tentukan interval kekonvergenan deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Jawaban

Pengujian dengan uji rasio mutlak :

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

Deret akan konvergen untuk semua nilai x

Atau x $\in$R

Deret Pangkat

Contoh 2

Tentukan interval kekonvergenan deret $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

Jawaban

Pengujian dengan uji rasio mutlak :

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n!} \frac{(n+1)!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| |n+1|$$

Dari pengujian tersebut diperoleh bahwa nilai yang memenuhi adalah *x* = *0* agar r < 1. Jadi deret konvergen untuk x = 0

Deret Pangkat

Contoh 3

Tentukan interval kekonvergenan deret $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n(n+1)}$

Jawaban

Pengujian dengan uji rasio mutlak :

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{3^n(n+1)}{x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{3} \right| \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = \left| \frac{x}{3} \right| .1 < 1$$

Dari pengujian tersebut diperoleh bahwa nilai yang memenuhi adalah –*3* < *x* < *3*.

Pada ujung – ujung interval, pengujian dilakukan secara terpisah.

Deret Pangkat

Pengujian deret pada saat *x = 3* dan x = 3 adalah sebagai berikut :

- Saat $x = -3 \rightarrow$ deretnya menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ $\rightarrow$ Deret ini diketahui sebagai deret harmonis yang divergen .
- Saat x = 3 $\rightarrow$ deretnya menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ $\rightarrow$ dengan uji deret ganti tanda diketahui bahwa deret ini konvergen.

Jadi interval kekonvergenan deret $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n(n+1)}$ adalah

$$-3 < x \le 3$$

Deret Pangkat

Contoh 4

Tentukan interval kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2}$

Jawaban

Pengujian dengan uji rasio mutlak :

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x-5)^n} \right| = \lim_{n \to \infty} |x-5| \left| \frac{n^2}{n^2+2n+1} \right| = |x-5| < 1$$

Dari pengujian tersebut diperoleh bahwa nilai yang memenuhi adalah $4 < x < 6$.

Pada ujung – ujung interval, pengujian dilakukan secara terpisah.

Deret Pangkat

Pengujian deret pada saat *x* = *4* dan x = 6 adalah sebagai berikut :

- Saat *x* = *4* $\rightarrow$ deretnya menjadi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ $\rightarrow$ karena $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen maka deret ganti tandanya juga konvergen. .
- Saat x = 6 $\rightarrow$ deretnya menjadi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yang merupakan deret-p yang diketahui konvergen.

Jadi interval kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2}$ adalah

$$4 \leq x \leq 6$$

Operasi-operasi deret pangkat

1. Operasi aljabar, yaitu penjumlahan, pengurangan, pembagian, dan substitusi
2. Turunan deret :

$$D_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3. Integral deret :

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C$$

Deret Pangkat

Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ adalah contoh deret pangkat x dengan $a_n = 1$.

Dengan menggunakan rumus jumlah takhingga deret geometri, maka diperoleh

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad |x| < 1$$

Secara umum x bisa diganti dengan U dimana U adalah fungsi yang memuat x.

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots \qquad |u| < 1$$

Deret Pangkat

Contoh 1

Nyatakan $\frac{1}{1+x}$ dalam deret pangkat

Jawaban

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)} \qquad \left|-x\right|=\left|x\right|<1$$

Dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\cdots \qquad \left|x\right|<1$$

Deret Pangkat

Contoh 2

Nyatakan $\dfrac{x}{1+x}$ dalam deret pangkat

Jawaban

Dengan menggunakan jawaban sebelumnya

[illegible]

Deret Pangkat

Contoh 3

Nyatakan $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ dalam deret pangkat

Jawaban

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

[illegible]

[illegible]

Jadi

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

Deret Pangkat

Contoh 4

Nyatakan $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ dalam deret pangkat

Jawaban

$\dfrac{1}{(1+x)^2}$ adalah turunan dari $-\dfrac{1}{1+x}$ sehingga

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{1+x}\right) = \frac{d}{dx}\left(-1+x-x^2+x^3-\cdots\right) = 1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$$

Deret Taylor dan Maclaurin

Suatu fungsi yang terdifferensial sampai orde n di $x = b$ dapat digambarkan sebagai suatu deret pangkat dari *(x–b)* yaitu ,

dimana nilai-nilai $a_0, a_1, a_2, \ldots$ diperoleh dari penurunan *f(x)* di $x = b$ sampai turunan ke-n, yaitu

$$a_0 = f(b)$$

$$a_1 = f'(b)$$

$$a_2 = \frac{f''(b)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^n(b)}{n!}$$

Deret Taylor dan Maclaurin

Atau *f*(*x*) bisa dituliskan sebagai

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(x-b)^3$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

Bentuk yang diperoleh di atas dikenal dengan bentuk polinomial taylor. Fungsi yang dapat diperderetkan dalam bentuk polinomial taylor, dinamakan deret taylor.

Bila $b = 0$, maka fungsi diperderetkan dalam deret maclaurin, yaitu

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Deret Taylor dan Maclaurin

Contoh 1

Perderetkan $f(x)=e^x$ ke dalam deret maclaurin

Jawaban

$$f(x)=e^x \longrightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=e^x \longrightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=e^x \longrightarrow f''(0)=1$$

$$\vdots$$

$$f'''(x)=e^x \longrightarrow f'''(0)=1$$

$$f^{(n)}(x)=e^x \longrightarrow f^{(n)}(0)=1$$

Sehingga $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Deret Taylor dan Maclaurin

Contoh 2

Perderetkan $f(x) = e^{2x-1}$ ke dalam deret Maclaurin / Taylor

Jawaban

Dari jawaban sebelumnya diperoleh bahwa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dengan mengganti x dengan 2x–1 maka diperoleh perderetannya adalah

$$e^{2x-1} = 1 + (2x-1) + \frac{(2x-1)^2}{2!} + \frac{(2x-1)^3}{3!} + \cdots$$

Deret Taylor dan Maclaurin

Berikut adalah fungsi-fungsi yang diperderetkan ke dalam deret Maclaurin

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Deret Taylor dan Maclaurin

Untuk memperderetkan suatu fungsi kedalam deret taylor atau maclaurin, dapat digunakan operasi-operasi deret pangkat seperti pada bagian sebelumnya, misal :

$$Cos\,x = \frac{d(Sin\,x)}{dx} = \frac{d\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots\right)}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\tan^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)\,dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Soal Latihan

A. Tentukan barisan-barisan berikut konvergen atau divergen

1. $\left\{ \dfrac{n}{2n^2+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

2. $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} \sin \dfrac{n\pi}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

3. $\left\{ \dfrac{\ln(n+1)}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

4. $\left\{ \left(\dfrac{1}{2} \right)^n + 2^n \right\}_{n=1}^{\infty}$

5. $\left\{ e^{-n} \cos n \right\}_{n=1}^{\infty}$

6. $\left\{ \dfrac{n^2}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Soal Latihan

A (Lanjutan)

7. $\left\{\dfrac{e^{2n}-2e^{n}}{e^{2n}-6}\right\}_{n=1}^{\infty}$

8. $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

9. $\left\{\dfrac{(-\pi)^{n}}{4^{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

10. $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

11. $\left\{\dfrac{e^{n}}{2^{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

12. $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Soal Latihan

A (Lanjutan)

13. $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

14. $\left\{\dfrac{100^n}{e^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

B. Tentukan deret berikut konvergen atau divergen ?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3+5n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3-6}$

Soal Latihan

B. (lanjutan)

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60^n}{n!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^{2n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2\, 2^n}{(2n+2)!}$

Soal Latihan

B. (lanjutan)

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)!}{4!\,n!\,4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)^{1/3}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^3}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^5+2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,n+1}{3n+2}$

Soal Latihan

B. (lanjutan)

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{e^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n + 5}{n^5}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{6n^2 - n}}$

Soal Latihan

B. (lanjutan)

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^{n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+5}$

C. Uji kekonvergenan deret-deret berikut, dan tentukan konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^{n}}{n^{5}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{n^{2}+1}$

Soal Latihan

D. Cari interval kekonvergenan deret pangkat berikut

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$

Soal Latihan

D. (Lanjutan)

7. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$

8. $1-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{(x-1)^3}{3!}+\dots$

9. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$

10. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2(x-2)}{\sqrt{4}}+\frac{4(x-2)^2}{\sqrt{5}}+\frac{8(x-2)^3}{\sqrt{6}}+\dots$

E. Perderetkan fungsi berikut dalam deret pangkat

1. $f(x)=\ln x$

2. $f(x)=e^{3x}$

Soal Latihan

E. (Lanjutan)

3. $f(x) = xe^{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{1-4x^2}$
6. $f(x) = x\ln(1+x)$

7. $f(x) = \sin x^2$
8. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+3x}$

9. $f(x) = e^{1-3x}$
10. $f(x) = x\ln(3x)$

Deret Laurent

Deret Laurent merupakan bentuk umum dari deret Taylor yang didalamnya memuat bentuk $(z - z_0)$ berpangkat bilangan bulat negatif ditambah dengan $(z - z_0)$ berpangkat bilangat bulat positif (berhingga atau tak berhingga).

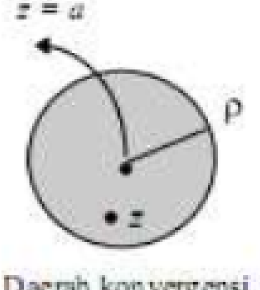
Teorema Laurent:

Andaikan bahwa f(z) analitik pada setiap titik di annulus tertutup

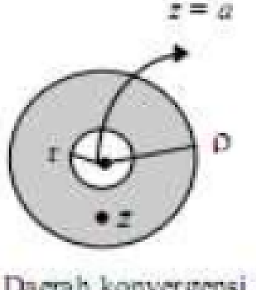
$$A: r \leq |z - z_0| \leq \rho$$

maka terdapat suatu deret dalam $(z - z_0)$ *berpangkat positif dan negative yang menyatakan f pada setiap titik* ξ *di dalam annulus (terbuka)* $r < |z - z_0| < \rho$

Dimana $K: |z - z_0| = \rho$ dan $C: |z - z_0| = r$ keduanya berorientasi positif.



Daerah konvergensi *Deret Taylor*



Daerah konvergensi *Deret Laurent*

Apabila fungsi $f(z)$ tidak analitik di $z = z_0$ maka $f(z)$ tidak dapat diperderetkan dalam deret Taylor di $z = z_0$. Agar $f(z)$ dapat diperderetkan di $z = z_0$ maka dilakukan dengan cara membuang titik singular $z = z_0$ dari daerah $|z - z_0| < R$ sehingga didapatkan daerah $R_1 < |z - z_0| < R_2$ (cincin / anulus) yang merupakan daerah keanalitikan fungsi $f(z)$.

Misal $f(z)$ tidak analitik di $z = z_0$ tetapi analitik pada anulus, $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Maka fungsi $f(z)$ dapat diperderetkan di $z = z_0$ menjadi bentuk deret Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \dots \dots (R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz, n = 1, 2, 3, \dots$$

Contoh

1. Tentukan deret Laurent dari fungsi $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$

   untuk $0 < z-1 < 2$

   Penyelesaian :

   $f(z)$ diuraikan menjadi :

   $$f(z) = \frac{-1}{2(z-1)} + \frac{3}{2}\frac{1}{(z-3)}$$

   $$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{3}{z-3}\right)$$

   Daerah yang memenuhi :

   $$|z-1| < 2 \rightarrow \left|\frac{z-1}{2}\right| < 0$$

   $$|z-1| > 0 \rightarrow |z-1| > 0$$

Bentuk Laurent yang memenuhi daerah di atas dari

$$\frac{3}{z-3} = \frac{3}{z-1-2} = \frac{-3}{2-z+1}$$

$$= \frac{-3}{2\left(1-\left(\frac{z-1}{2}\right)\right)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

Jadi deret Laurent di *f(n)* di atas adalah

$$f(z) = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \left[-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

Contoh

2. Tentukan deret Laurent dari $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; z = 1

Penyelesaian :

Misal z – 1 = u maka z = u + 1

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^{2(1+u)}}{u^3}$$

$$= \frac{e^2}{u^3} \cdot e^{2u}$$

$$= \frac{e^2}{u^3}\left(1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)} + \frac{4e^2}{3} + \dots$$

Deret konvergen untuk setiap nilai $z \neq 1$