# MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

## 4 Sistem Persamaan Linier

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Sistem Persamaan Linier

**Sub Pokok Bahasan**

- Pendahuluan
- Solusi SPL dengan OBE
- Solusi SPL dengan Invers matriks dan Aturan Cramer
- SPL Homogen

**Beberapa Aplikasi Matriks**

- Rangkaian listrik
- Jaringan Komputer
- Model Ekonomi
- dan lain-lain.

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Pendahuluan

**Persamaan linier** adalah persamaan dimana peubahnya tidak memuat eksponensial, trigonometri (seperti *sin*, *cos*, dll.), perkalian, pembagian dengan peubah lain atau dirinya sendiri.

**Contoh :**

Jika perusahaan A membeli 1 Laptop $(x)$ dan 2 PC $(y)$ maka ia harus membayar \$ 5000, sedangkan jika membeli 3 Laptop dan 1 PC maka ia harus membayar \$ 10000.

Representasi dari masalah tersebut dalam bentuk SPL

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Pendahuluan (2)

- Bentuk umum system persamaan linier

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{matrix}$$

- Dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Pendahuluan (3)

Atau

$$AX = B$$

dimana

– $A$ dinamakan matriks koefisien
– $X$ dinamakan matriks peubah
– $B$ dinamakan matriks konstanta

Contoh :

Perhatikan bahwa SPL

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi SPL

Solusi SPL adalah Himpunan bilangan Real di mana jika disubstitusikan pada peubah suatu SPL akan memenuhi nilai kebenaran SPL tersebut.

Perhatikan SPL :

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

Maka

$\{x = 3000,\ y = 1000\}$ merupakan solusi SPL

$\{x = 1000,\ y = 3000\}$ bukan solusi SPL

Suatu SPL, terkait dengan solusi, mempunyai tiga kemungkinan :

- SPL mempunyai solusi tunggal
- SPL mempunyai solusi tak hingga banyak
- SPL tidak mempunyai solusi

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

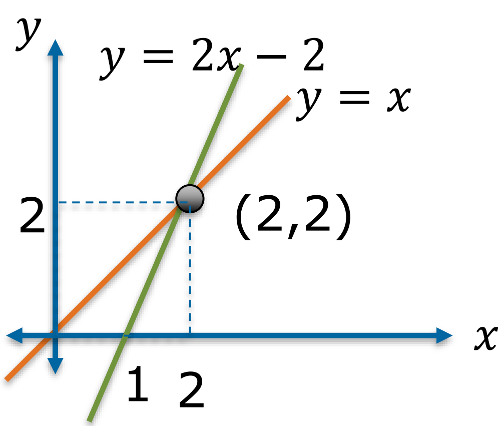
## Solusi SPL - Ilustrasi Pada Bidang Kartesius

CASE I

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Jika digambar dalam kartesius




(2, 2) merupakan titik potong dua garis tersebut

Tidak ada titik potong yang lain selain titik tersebut

Artinya : SPL $2x - y = 2$ dan $x - y = 0$ mempunyai **solusi tunggal**, yaitu $x = 2, y = 2$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi SPL - Ilustrasi Pada Bidang Kartesius (2)

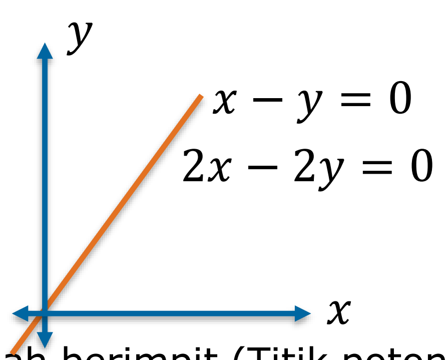
CASE II

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Jika kedua ruas pada persamaan kedua dikalikan ½, maka akan diperoleh persamaan yang sama dengan pers. pertama

Jika digambar dalam kartesius




Terlihat bahwa dua garis tersebut adalah berimpit (Titik potong kedua garis banyak sekali disepanjang garis tersebut)

Artinya, SPL diatas mempunyai **solusi tak hingga banyak**

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

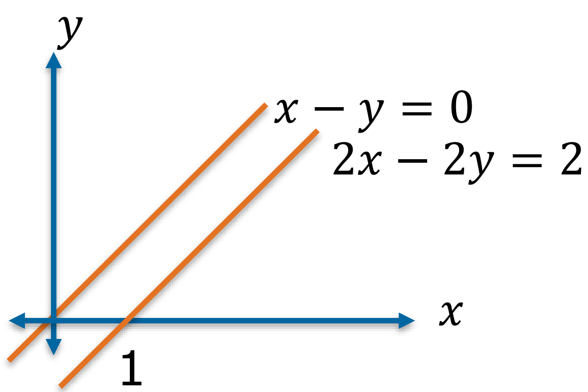
## Solusi SPL - Ilustrasi Pada Bidang Kartesius (3)

CASE III

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

Jika digambar dalam kartesius




Terlihat bahwa dua garis tersebut adalah sejajar (Tak akan pernah diperoleh titik potong kedua garis itu)

Artinya, SPL diatas **TIDAK mempunyai solusi**

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE

**Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE**

- Tulis SPL dalam bentuk matriks yang diperbesar
- Lakukan OBE sampai menjadi eselon baris tereduksi

**Contoh :**

Tentukan solusi dari SPL

$$\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

Jawab :

Matriks yang diperbesar dari SPL

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE (2)

Tulis kembali matriks yang diperbesar hasil OBE   menjadi perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maka, solusi SPL tersebut adalah $x = 2$ dan $y = 1$

**Contoh :**

Tentukan solusi (jika ada) dari SPL berikut :

a. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE (3)

b. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 2 \end{cases}$

**Jawab :**

a. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Terlihat bahwa solusi SPL adalah $a = 1, b = 2,$ dan $c = 3$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE (4)

b. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jika dikembalikan kedalam bentuk perkalian matriks diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ini memberikan $a + c = 4$ dan $b + c = 5$.

Dengan memilih $c = t$, dimana $t$ adalah parameter.

Maka solusi SPL tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$ , dimana $t$ adalah parameter

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE (5)

c. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Terlihat bahwa ada baris nol pada matriks koefisien tetapi matriks konstanta pada baris ke-3 sama dengan 1 (tak nol)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dari baris ke-3 diperoleh hubungan bahwa

$0.a + 0.b + 0.c = 1.$

Tak ada nilai $a$ , $b$ dan $c$ yang memenuhi kesamaan ini.

Jadi, SPL tersebut tidak memiliki solusi.

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE (6)

**Contoh :**

Diketahui SPL :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)\,z = a + 2 \end{cases}$$

Tentukan $a$ sehingga SPL :

a. Mempunyai solusi tunggal

b. Tidak mempunyai solusi

c. Solusi yang tidak terhingga

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE (7)

**Jawab:**

Matrik diperbesar dari SPL adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)$$

a. Agar SPL mempunyai solusi tunggal:

$a^2 - 16 \neq 0$ sehingga $a \neq 4$ dan $a \neq -4$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi Sistem Persamaan Linier dengan OBE (8)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)$$

b. Perhatikan baris ketiga

$0x + 0y + (a^2 - 16a)\,z = a - 4$

SPL tidak mempunyai solusi saat $a^2 - 16 = 0$ dan $a - 4 \neq 0$

Sehingga $a = \pm 4$ dan $a \neq 4$.

Jadi, $a = -4$.

c. SPL mempunyai solusi tak hingga banyak jika memenuhi persamaan

$a^2 - 16 = 0$ dan $a - 4 = 0$

Jadi, $a = 4$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Solusi SPL dengan Matriks Invers

Tinjau persamaan linear berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau

$$AX = B$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan$A^{-1}$, maka didapat

$$A^{-1}A\,X = A^{-1}B$$

Karena $A^{-1}A = I$ maka

$$X = A^{-1}B$$

Ingat bahwa suatu matriks $A$ mempunyai invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

# Solusi SPL dengan Matriks Invers (2)

**Contoh :**

Tentukan solusi dari SPL berikut :

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$$

**Jawab :**

Perhatikan bahwa

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Jadi A mempunyai Invers

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

## Solusi SPL dengan Matriks Invers (3)

sehingga $X = A^{-1} B$ berbentuk :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Jadi, Solusi SPL tersebut adalah $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

# Solusi SPL dengan Aturan Cramer

Misalkan SPL ditulis dalam bentuk AX = B, yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Jika determinan *A* tidak sama dengan nol maka solusi dapat ditentukan satu persatu (peubah $ke-i, x_i$)

Langkah-langkah aturan *cramer* adalah :

a. Hitung determinan *A*

b. Tentukan $A_i$ ➔ matriks *A* dimana kolom ke-*i* diganti oleh B.

Contoh :

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Solusi SPL dengan Aturan Cramer (2)

c. Hitung $|A_i|$

d. Solusi SPL untuk peubah adalah $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

Contoh :

Tentukan solusi $b$ dari SPL berikut :

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

# Solusi SPL dengan Aturan Cramer (3)

Maka

$$b = \frac{\det(Ab)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{1}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1-0) + (-4)(1-0) + 1(7-0) = -1 + (-4) + 7$$

Jadi, Solusi peubah *b* yang memenuhi SPL adalah *b* = 2

# Solusi SPL dengan Aturan Cramer (4)

Tentukan solusi SPL untuk peubah $a$ ?

$$a = \frac{\det(Aa)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1}$$

$$= 4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-0)+1(-2-(-7))$$

$$= -4 + 0 + 5$$

$$= 1$$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Sistem Persamaan Linier Homogen

Bentuk umum

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- SPL homogen merupakan SPL yang konsisten (selalu mempunyai solusi).
- Solusi SPL homogen dikatakan tunggal jika solusi itu adalah

  $$\{x_1, x_2, \dots, x_n = 0\}$$

  Jika tidak demikian,
  SPL homogen mempunyai solusi tak hingga banyak (biasanya ditulis dalam bentuk parameter)

# Sistem Persamaan Linier Homogen (2)

Contoh :

Tentukan solusi SPL homogen berikut

$$\begin{cases} 2p + q - 2r - 2s = 0 \\ p - q + 2r - s = 0 \\ -p + 2q - 4r + s = 0 \\ 3p - 3s = 0 \end{cases}$$

SPL dapat ditulis dalam bentuk

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Sistem Persamaan Linier Homogen (3)

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Maka solusi SPL homogen adalah :

$p = a,$

$q = 2b\,,$

$s = a,$ dan

$r = b,$

dimana *a, b* merupakan parameter.

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Sistem Persamaan Linier Homogen (4)

**Contoh :**

Diketahui SPL

$$\begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan *b* agar SPL memiliki solusi tak hingga banyak

b. Tuliskan solusi SPL tersebut

**Jawab :**

Solusi suatu SPL homogen adalah tak tunggal
jika *det*(A) = 0.

# Sistem Persamaan Linier Homogen (5)

$$\begin{vmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (-b)\begin{vmatrix} 1-b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

⇔ (−b) ((1 − b)(1 − b)) − 1 = 0

⇔ (−b) (b2 − 2b + 1 − 1) = 0

⇔ (−b) (b2 − 2b) = 0

⇔ b = 0 atau b = 2

Solusi SPL tak hingga banyak saat $b = 0$ atau $b = 2$

# Sistem Persamaan Linier Homogen (6)

- Saat $b = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Dengan OBE maka

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Misalkan *p*,*q* adalah parameter Riil, maka

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q$$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Sistem Persamaan Linier Homogen (7)

- Saat $b$ = 2

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Dengan OBE maka

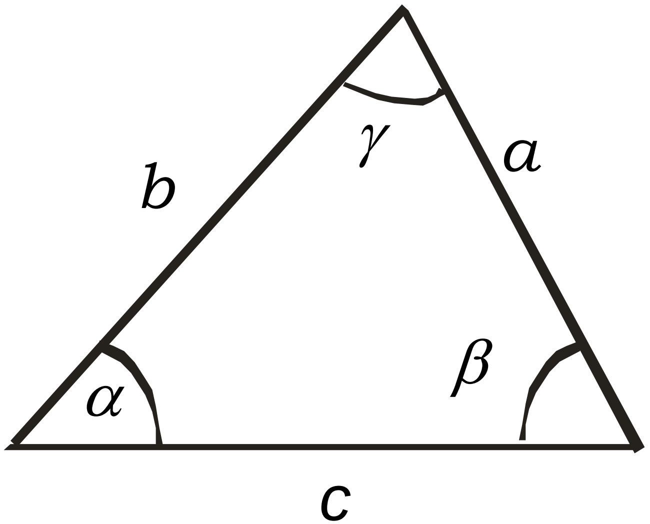
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Misalkan $q$ adalah parameter Riil, maka $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## Sistem Persamaan Linier

Perhatikan ilustrasi segitiga berikut :




Tunjukan bahwa :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

# Sistem Persamaan Linier (2)

**Jawab :**

Dari gambar tersebut diketahui bahwa :

$$c\cos\beta + b\cos\gamma = a$$

$$c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$$

$$b\cos\alpha + a\cos\beta = c$$

atau

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

## Sistem Persamaan Linier (3)

- Perhatikan bahwa :

$$\det\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} = 0 + c(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} c & a \\ b & 0 \end{vmatrix} + b(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= -c(ab) + b(ac)$$

dengan aturan Cramer diperoleh bahwa :

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix}}{2abc} = \frac{1}{2abc}\left( c\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & a \\ c & 0 \end{vmatrix} + 0 + a\,(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \right)$$

## Sistem Persamaan Linier (4)

$$\cos\alpha = \frac{ac^2 - a^3 + a^2b^2}{2abc}$$

$$= \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2bc}$$

Jadi, terbukti bahwa :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## LATIHAN

1. Tentukan solusi SPL berikut :

$$
\begin{aligned}
2a - 8b &= 12 \\
3a - 6b &= 9 \\
-a + 2b &= -4
\end{aligned}
$$

2. Tentukan solusi SPL :

$$
\begin{aligned}
2p - 2q - r + 3s &= 4 \\
q + 2s &= 1 \\
-2p + p - 2q - 4s &= -2
\end{aligned}
$$

3. Tentukan solusi SPL homogen berikut :

$$
\begin{aligned}
p - 5q - 4r - 7t &= 0 \\
2p + 10q - 7r + s - 7t &= 0 \\
r + s + 7t &= 0 \\
-2p - 10q + 8r + s + 18t &= 0
\end{aligned}
$$

# LATIHAN (2)

4. Diketahui SPL  AX = B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan solusi SPL di atas dengan menggunakan :

- Operasi Baris Elementer (OBE )
- Invers matrik
- Aturan Cramer

5. Diketahui

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ yang memenuhi.

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

## LATIHAN (3)

6. SPL homogen (dengan peubah *p*, *q*, dan *r*)

$$p + 2q + r = 0$$
$$q + 2r = 0$$
$$k^2 p + (k+1)\, q + r = 0$$

Tentukan nilai *k* sehingga SPL punya solusi tunggal

7. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

2x + y ï z = 1
x + y + z = 6
x ï 2y + z = 0