DUALITAS

Ditinjau dari teori dan praktek, maka dualitas merupakan konsep linear programming yang penting dan menarik. Ide dasar dari teori dualitas adalah bahwa setiap persoalan linear programming mempunyai suatu linear program yang berkaitan yang disebut **"dual"**. Sehingga solusi dari persoalan asli LP (**primal**), juga memberikan solusi pada dualnya.

DEFINISI MASALAH DUAL

Secara sistematis, dualitas merupakan alat bantu masalah LP, yang secara langsung didefinisikan dari persoalan aslinya atau dari model LP primal. Dalam kebanyakan perlakuan LP, dualitas sangat tergantung pada primal dalam hal tipe kendala, variabel keputusan dan kondidi optimum. Oleh karena itu dalam kenyataannya teori dualitas secara tegas **tidak diharuskan** penggunaannya.

Primal-dual menunjukkan hubungan secara simetris dengan ketentuan sebagai berikut :
1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan dual
2. Konstanta ruas kanan primal menjadi koefisien fungsi tujuan dual
3. Semua kolom primal menjadi kendala dual
4. Semua kendala primal menjadi variabel keputusan dual
5. Koefisien kendala dari variabel primal menjadi koefisien yang berkorespondensi dengan kendala dual.

Contoh berikut memberikan gambaran yang lebih jelas memahami bentuk standar primal dual.

Contoh 1 :

Bentuk Primal

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Maksimum} & Z = & 5X_1 & + & 12X_2 & + & 10X_3 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & X_1 & + & 4X_2 & + & X_3 & \le & 10 \\
 & 2) & 2X_1 & + & X_2 & + & 3X_3 & \le & 15 \\
 & & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \ge & 0
\end{array}
$$

Bentuk Standar Primal

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\text{Maksimum} & Z = & 5X_1 & + & 12X_2 & + & 10X_3 & + & 0S_1 & + & 0S_2 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & X_1 & + & 4X_2 & + & X_3 & + & S_1 & & & = & 10 \\
 & 2) & 2X_1 & + & X_2 & + & 3X_3 & & & + & S_2 & = & 15 \\
 & & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & , & S_1 & , & S_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Bentuk Dual

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Minimum} & W = & 10Y_1 & + & 15Y_2 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & Y_1 & + & 2Y_2 & \ge & 5 \\
 & 2) & 4Y_1 & + & Y_2 & \ge & 12 \\
 & 3) & Y_1 & + & 3Y_2 & \ge & 10 \\
 & & Y_1 & & & \ge & 0 \\
 & & & & Y_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Contoh 2 :

Bentuk Primal

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\text{Minimum} & Z & = & 5X_1 & + & 2X_2 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & & -X_1 & + & X_2 & \geq & 3 \\
 & 2) & & 2X_1 & + & 3X_2 & \geq & 5 \\
 & & & X_1 & , & X_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bentuk Standar Primal

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcr}
\text{Minimum} & Z & = & 5X_1 & + & 2X_2 & + & 0S_1 & + & 0S_2 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & & -X_1 & + & X_2 & - & S_1 & & & = & 3 \\
 & 2) & & 2X_1 & + & 3X_2 & & & - & S_2 & = & 5 \\
 & & & X_1 & , & X_2 & , & S_1 & , & S_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bentuk Dual

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\text{Maksimum} & W & = & 3Y_1 & + & 5Y_2 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & & -Y_1 & + & 2Y_2 & \leq & 5 \\
 & 2) & & Y_1 & + & 3Y_2 & \leq & 2 \\
 & & & Y_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & Y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Contoh 3 :

Bentuk Primal

$$
\begin{array}{llcrcrcrcr}
\text{Maksimum} & Z & = & 5X_1 & + & 12X_2 & + & 4X_3 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & & X_1 & + & 2X_2 & + & X_3 & \leq & 10 \\
 & 2) & & 4X_1 & - & X_2 & + & 3X_3 & = & 8 \\
 & & & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bentuk Standar Primal

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcr}
\text{Maksimum} & Z & = & 5X_1 & + & 12X_2 & + & 4X_3 & + & 0S_1 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & & X_1 & + & 2X_2 & + & X_3 & + & S_1 & = & 10 \\
 & 2) & & 4X_1 & + & X_2 & + & 3X_3 & & & = & 8 \\
 & & & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & , & S_1 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bantuk Dual

$$
\begin{array}{llcrcrcl}
\text{Minimum} & W & = & 10Y_1 & + & 8Y_2 & & \\
\text{Dengan Kendala :} & 1) & & Y_1 & + & 4Y_2 & \geq & 5 \\
 & 2) & & 2Y_1 & + & Y_2 & \geq & 12 \\
 & 3) & & Y_1 & + & 3Y_2 & \geq & 4 \\
 & & & Y_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & Y_2 & \multicolumn{2}{l}{\text{tidak bertanda}}
\end{array}
$$

Contoh 4 :

Bentuk Primal

Maksimum	Z	=	$5X_1$	+	$6X_2$			
Dengan Kendala :	1)		X_1	+	$2X_2$	=	5	
	2)		$-X_1$	+	$5X_2$	$\geq$	3	
	3)		$4X_1$	+	$7X_2$	$\leq$	8	
			X_1		tidak bertanda			
					X_2	$\geq$	0	

Oleh karena variabel X_1 tidak bertanda (boleh positif atau negatif), maka variabel tersebut diganti dengan dua variuabel yang berlainan yaitu $X_1 = X_3 - X_4$, dimana X_3, $X_4 \geq 0$. Dengan demikian bentuk standar primal **contoh 4** adalah :

Bentuk Standar Primal

Maksimum	Z	=	$5X_3$	-	$5X_4$	+	$6X_2$	+	$0S_1$	+	$0S_2$		
Dengan Kendala :	1)		X_3	-	X_4	+	$2X_2$					=	5
	2)		$-X_3$	+	X_4	+	$5X_2$	-	S_1			=	3
	3)		$4X_3$	-	$4X_4$	+	$7X_2$			+	S_2	=	8
			X_3	,	X_4	,	X_2	,	S_1	,	S_2	$\geq$	0

Bentuk Dual

Minimum	W	=	$5Y_1$	+	$3Y_2$	+	$8Y_3$		
Dengan Kendala :	1)		Y_1	-	Y_2	+	$4Y_3$	$\geq$	5
	2)		$-Y_1$	+	Y_2	-	$4Y_3$	$\geq$	-5
	3)		$2Y_1$	+	$5Y_2$	+	$7Y_3$	$\geq$	6
					Y_2			$\geq$	0
							Y_3	$\geq$	0
			Y_1				tidak bertanda		

Dari beberapa contoh diatas, dapat disimpulkan bahwa karakteristik dasar dari standar primal-dual adalah sebagai berikut :

Standar Primal *)	**Dual**	
Fungsi Tujuan	**Fungsi Tujuan**	**Kendala**
Maksimum	Minimum	$\geq$
Minimum	Maksimum	$\leq$

*) Ketentuan dalam bentuk standar primal adalah semua konstanta ruas kanan kendala non-negative dan semua variabel keputusan non-negative

Untuk membahas hubungan antara primal-dual, akan digunakan **contoh berikut**, dimana solusi optimum dual dapat diperoleh secara langsung dari tabel simpleks optimum primal.

Bentuk Primal

Maksimum $Z = 5X_1 + 12X_2 + 10X_3$

Dengan Kendala :

1) $X_1 + 2X_2 + X_3 \le 10$
2) $2X_1 + X_2 + 3X_3 \le 15$

$X_1 , X_2 , X_3 \ge 0$

Bentuk Dual

Minimum $W = 10Y_1 + 15Y_2$

Dengan Kendala :

1) $Y_1 + 2Y_2 \ge 5$
2) $2Y_1 + Y_2 \ge 12$
3) $Y_1 + 3Y_2 \ge 10$

$Y_1 \ge 0$

$Y_2 \ge 0$

Tabel Simpleks Optimum Primal

	C_B	C_j VDB	5 X_1	12 X_2	10 X_3	0 S_1	0 S_2	Solusi (b_i)
Iterasi 0	0	S_1	1	**2**	1	1	0	10
	0	S_2	2	1	3	0	1	15
		Zj – Cj	- 5	- 12	- 10	0	0	0
Iterasi 1	12	X_2	0,5	1	0,5	0,5	0	5
	0	S_2	1,5	0	**2,5**	- 0,5	1	10
		Zj – Cj	1	0	- 4	6	0	60
Iterasi 2 Optimum	12	X_2	0,2	1	0	0,6	- 0,2	3
	10	X_3	0,6	0	1	- 0,2	0,4	4
		Zj – Cj	3,4	0	0	5,2	1,6	76

Solusi optimum primal dalam tabel adalah : $\mathbf{X_2} = \mathbf{3}$ dan $\mathbf{X_3} = \mathbf{4}$, dengan total $\mathbf{Z} = \mathbf{76}$.

Tabel Simpleks Dual

CB	**Cj VDB**	**10**	**15**	**0**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	**Solusi (bj)**
		$\mathbf{Y_1}$	$\mathbf{Y_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	
M	A_1	1	**2**	-1	0	0	1	0	0	**5**
M	A_2	2	1	0	-1	0	0	1	0	**12**
M	A_3	1	3	0	0	-1	0	0	1	**10**
	Wj-Cj	4M-10	6M-15	-M	-M	-M	0	0	0	**27M**
15	Y_2	0.5	1	-0.5	0	0	0.5	0	0	**2.5**
M	A_2	1.5	0	0.5	-1	0	-0.5	1	0	**9.5**
M	A_3	-0.5	0	**1.5**	0	-1	-1.5	0	1	**2.5**
	Wj-Cj	M-2.5	0	2M-7.5	-M	-M	-3M+7.5	0	0	12M+37.5
15	Y_2	1/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3	10/3
M	A_2	**5/3**	0	0	-1	1/3	0	1	-1/3	26/3
0	S_1	-1/3	0	1	0	-2/3	-1	0	2/3	5/3
	Wj-Cj	$^5/_3$M-5	0	0	-M	$^1/_3$M-5	-M	0	-$^4/_3$M+5	26/3M+50
15	Y_2	0	1	0	1/5	-6/15	0	-1/5	6/15	1.6
10	Y_1	1	0	0	-3/5	1/5	0	3/5	-1/5	5.2
0	S_1	0	0	1	-1/5	-9/15	-1	1/5	9/15	3.4
	Wj-Cj	0	0	0	-3	-4	-M	-M+3	-M+4	76

Solusi optimum dual dalam tabel diatas adalah : $\mathbf{Y_1}$ = **5,2** dan $\mathbf{Y_2}$ = **1,6**, dengan total **W** = **76**.

Dalam tabel simpleks primal, variabel basis awal adalah S_1 dan S_2, dan koefisien Zj-Cj pada tabel optimum primal kolom S_1 dan S_2, adalah $\mathbf{S_1}$ = **5,2** dan $\mathbf{S_2}$ = **1,6**. Kendala dual untuk kolom S_1 dan S_2 tersebut adalah $\mathbf{Y_1 \geq 0}$ dan $\mathbf{Y_2 \geq 0}$ (lihat kendala 4 dan 5 dalam bentuk dual). Informasi ini dapat menentukan solusi optimum dual sebagai berikut :

1. $5,2 = Y_1 \geq 0$, atau
   $5,2 = Y_1 - 0$, atau
   $\mathbf{Y_1 = 5,2}$

2. $1,6 = Y_2 \geq 0$, atau
   $1,6 = Y_2 - 0$, atau
   $\mathbf{Y_2 = 1,6}$

Hasil ini sama dengan solusi optimum yang terdapat pada tabel dual optimum.

Sekarang perhatikan tabel optimum dual yang dapat memberikan solusi optimum primal dengan menggunakan persamaan diatas.

Variabel basis dalam tabel awal dual (iterasi ke 0) adalah : A_1, A_2 dan A_3. Koefisien Wj-Cj tabel optimum dual untuk kolom $\mathbf{A_1}$ = **-M**, $\mathbf{A_2}$ = **-M+3**, dan $\mathbf{A_3}$ = **-M+4**. Kendala primal untuk A_1, A_2 dan A_3 adalah : $X_1 \geq M$, $X_2 \geq M$, dan $X_3 \geq M$. Informasi ini dapat menentukan solusi optimum primal sebagai berikut :

1. $X_1 - M = -M$, atau
   $X_1 = M - M$, atau
   $\mathbf{X_1 = 0}$

2. $X_2 - M = -M + 3$, atau
$X_2 = 3 + M - M$, atau
$\mathbf{X_2 = 3}$
3. $X_3 - M = -M + 4$, atau
$X_3 = 4 + M - M$, atau
$\mathbf{X_3 = 4}$

Hasil ini sama dengan solusi optimum yang terdapat pada tabel primal optimum.

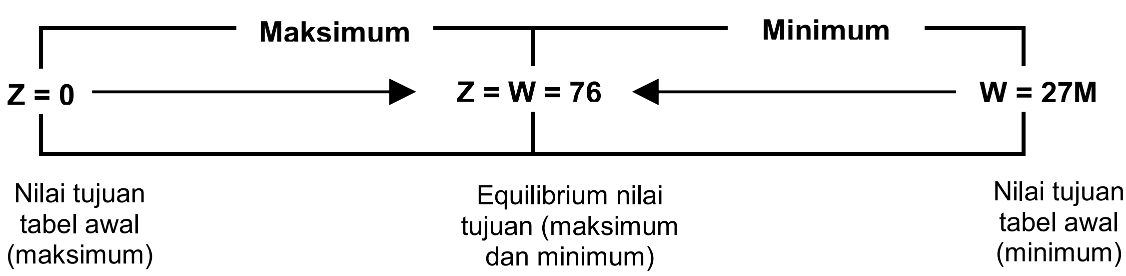
Dalam solusi optimum primal dan dual diatas terdapat dua kesimpulan yang menarik yaitu :

1. Maksimum Z = Minimum W = 76
   Hasil ini juga dapat diperoleh dengan memasukkan nilai variabel keputusan ke dalam fungsi tujuan masing-masing.

$$\begin{aligned} Z &= 5X_1 + 12X_2 + 10X_3 \\ &= 5(0) + 12(3) + 10(4) \\ &= \mathbf{76} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= 10Y_1 + 15Y_2 \\ &= 10(5{,}2) + 15(1{,}6) \\ &= \mathbf{76} \end{aligned}$$

2. Dalam masalah maksimum, nilai **Zj-Cj** pada tabel awal memiliki **Z = 0** dan **selalu menaik sampai jumlah Z = 76**. Dalam masalah minimum, nilai **Wj-Cj** pada tabel awal memiliki **W = 27M** dan **selalu menurun sampai jumlah W = 76**.



METODE DUAL SIMPLEKS

Apabila kita memiliki masalah primal dalam tujuan berbentuk maksimum maka tabel simpleks belum optimum jika **Zj-Cj < 0**. Dengan kata lain, tabel simpleks akan optimum jika dan hanya jika **Zj-Cj ≥ 0** untuk semua j.

Sekarang kita lihat kembali model standar dualitas, dimana :

$$Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

Apabila $Z_j - C_j < 0$, atau $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j < c_j$, maka kondisi ini tidak layak menurut dual dan tidak optimum menurut primal. Kondisi yang layak menurut dual dan optimum menurut primal apabila $Z_j - C_j \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j$.

Dalam kenyataannya mungkin kita menghadapi suatu kondisi dimana tabel simpleks awal tidak layak, tetapi tabel tersebut adalah optimum. Menghadapi keadaan seperti ini dikembangkan suatu metode baru yang disebut sebagai "**metode dual simpleks**". Bagaimana mekanisme penggunaan metode ini, kita pelajari contoh berikut ini.

Minimum $Z = 2X_1 + 4X_2 + X_3 + 3X_4$

dk :

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 \geq 30$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 20$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah mengkonversikan semua kendala menjadi lebih kecil sama dengan (≤). Untuk mengkonversikan kendala kebentuk ≤, kalikan semua kendala dengan (-1), sehingga menjadi :

Minimum $Z = 2X_1 + 4X_2 + X_3 + 3X_4$

dk :

$$-X_1 - 2X_2 - 3X_3 - 4X_4 \leq -30$$
$$-2X_1 - X_2 - X_3 - X_4 \leq -20$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Langkah selanjutnya adalah memasukkan slack variabel ke dalam kendala, sehingga menjadi :

Minimum $Z = 2X_1 + 4X_2 + X_3 + 3X_4$

$$-X_1 - 2X_2 - 3X_3 - 4X_4 + S_1 = -30$$
$$-2X_1 - X_2 - X_3 - X_4 + S_2 = -20$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, S_1, S_2 \geq 0$$

Jika dimasukkan kedalam tabel simpleks, maka *slack* variabel (S_1 dan S_2) tidak layak, karena memiliki konstatanta ruas kanan negatif. Oleh karena fungsi tujuan berbentuk minimum, maka tabel simpleks akan optimum apabila koefisien fungsi tujuan pada baris Zj – Cj ≤ 0. Pada tabel awal solusi basisnya menunjukkan $\mathbf{S_1}$ = **-30** dan $\mathbf{S_2}$ = **-20**, kondisi ini adalah optimum tetapi tidak layak.

Untuk menyelesaikan masalah ini, dapat digunakan metode dual simpleks seperti berikut :

CB	**Cj**	**2**	**4**	**1**	**1**	**0**	**0**	Konstata ruas kanan [b_i]
	VDB	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	
0	S_1	-1	-2	**-3**	-4	1	0	**- 30**
0	S_2	-2	-1	-1	-1	0	1	- 20
	Zj – Cj	-2	-4	-1	-3	0	0	0

Langkah selanjutnya adalah menentukan variabel yang akan keluar basis atau baris kunci, yaitu basis yang memiliki angka negatif terbesar. Dalam tabel diatas adalah variabel basis S_1, karena memiliki nilai -30. Selanjutnya, menentukan variabel yang akan masuk basis atau kolom kunci, yaitu variabel nonbasis yang memiliki angka rasio terkecil.

Angka rasio, dicari dengan cara membagi angka yang terdapat pada baris Zj – Cj dengan angka yang terdapat pada baris kunci yang berkorespondensi dengan variabel nonbasis.

Variabel nonbasis	X_1	X_2	X_3	X_4
Baris Zj – Cj	-2	-4	-1	-3
Baris S_1	-1	-2	-3	-4
Rasio	**2**	**2**	**1/3**	**3/4**

Variabel masuk basis adalah X_3, karena memiliki rasio terkecil yaitu 1/3, dengan elemen pivot (-3). Dengan menggunakan operasi pivot, dapat diperoleh tabel baru dengan cara sebagai berikut :

1. Bagi baris S_1 dengan elemen pivotnya (-3), sehingga hasilnya menjadi baris baru untuk variabel masuk X_3.

[-1	-2	-3	-4	1	0	-30]	:	[-3]
[1/3	**2/3**	**1**	**4/3**	**-1/3**	**0**	**10]**		

2. Kurangkan hasil dari baris baru diatas dengan baris selanjutnya yaitu S_2, tentunya setelah dikalikan dengan elemen pivot baris S_2, yaitu -1. Sehingga hasilnya menjadi nilai baru untuk baris S_2.

[-2	-1	-1	-1	0	1	-20]			
[1/3	2/3	1	4/3	-1/3	0	10]	x	[-1]	–
-5/3	**-1/3**	**0**	**1/3**	**-1/3**	**1**	**-10**			

3. Kurangkan hasil dari baris baru diatas dengan baris selanjutnya yaitu Zj – Cj, tentunya setelah dikalikan dengan elemen pivot baris Zj – Cj, yaitu -1. Sehingga hasilnya menjadi nilai baru untuk baris Zj – Cj.

[-2	-4	-1	-3	0	0	0]			
[1/3	2/3	1	4/3	-1/3	0	10]	x	[-1]	–
-5/3	**-10/3**	**0**	**-5/3**	**-1/3**	**0**	**10**			

Tabel Iterasi Pertama

CB	Cj	2	4	1	1	0	0	Konstata ruas kanan [b_i]
	VDB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	
1	X_3	1/3	2/3	1	4/3	1/3	0	10
0	S_2	-5/3	-1/3	0	1/3	-1/3	1	-10
	Zj – Cj	-5/3	-10/3	0	-5/3	-1/3	0	10

Tabel diatas belum optimum, dan sebagai variabel keluar basis adalah S_2. Sedangkan variabel yang akan masuk basis adalah X_1 karena memiliki rasio terkecil.

Variabel nonbasis	X_1	X_2	X_4	S_1
Baris Zj – Cj	-5/3	-10/3	-5/3	-1/3
Baris S_2	-5/3	-1/3	1/3	-1/3
Rasio	**1**	**10**	**-5**	**1**

Nilai elemen pivotnya adalah **-5/3**, dengan menggunakan operasi pivot diperoleh nilai baru baris $\mathbf{S_2}$ yang posisinya digantikan oleh variabel $\mathbf{X_1}$.

[-5/3 -1/3 0 1/3 -1/3 1 -10] : [-5/3]

[1 1/5 0 -1/5 1/5 -3/5 6]

1. Kurangkan hasil dari baris baru diatas dengan baris X_3, tentunya setelah dikalikan dengan elemen pivot baris X_3, yaitu 1/3. Sehingga hasilnya menjadi nilai baru untuk baris X_3.

[1/3 2/3 1 4/3 -1/3 0 10]

[1 1/5 0 -1/5 1/5 -3/5 6] x [1/3] _

[0 3/5 1 7/5 -2/5 1/5 8]

2. Kurangkan hasil dari baris baru diatas dengan baris Zj – Cj, tentunya setelah dikalikan dengan elemen pivot baris Zj – Cj, yaitu -5/3. Sehingga hasilnya menjadi nilai baru untuk baris X_3.

[-5/3 -10/3 0 -5/3 -1/3 0 10]

[1 1/5 0 -1/5 1/5 -3/5 6] x [-5/3] _

[0 -3 0 -2 0 -1 20]

Tabel Iterasi Kedua (optimum)

CB	**Cj**	**2**	**4**	**1**	**1**	**0**	**0**	Konstata ruas kanan [b_i]
	VDB	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	
1	X_3	0	3/5	1	7/5	-2/5	1/5	**8**
2	X_1	1	1/5	0	-1/5	1/5	-3/5	**6**
	Zj – Cj	**0**	**-3**	**0**	**-2**	**0**	**-1**	**20**

Tabel optimum diatas adalah layak, baik menurut primal maupun dual.

Solusi optimum primalnya adalah :

$\mathbf{X_1}$ = **6**, $\mathbf{X_2}$ = **0**, $\mathbf{X_3}$ = **8** dan $\mathbf{X_4}$ = **0**, dengan total nilai **Z = 2(6) + 4(0) + 1(8) + 3(0) = 12 + 8 = 20**.

Sedangkan solusi optimum dual adalah

$\mathbf{Y_1}$ = **0** dan $\mathbf{Y_2}$ = **-1**, dengan total nilai **W = – 30(0) – 20(-1) = 0 + 20 = 20**.

Sumber Rujukan :

1. Aminudin, 2005, ***Prinsip-Prinsip Riset Operasi***, Penerbit Erlangga, Jakarta.
2. Frederick S. Hiller, Gerald J. Lieberman, 1990, ***Pengantar Riset Operasi***, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, Jakarta
3. Hamdy A. Taha, 1996, ***Riset Opersai – Suatu Pengantar***, Edisi Kelima, Binarupa Aksara, Jakarta.
4. Johanes Supranto, 2005, ***Riset Operasi Untuk Pengambilan Keputusan***, Edisi Revisi, Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta
5. Siswanto, 2007, ***Operations Research***, Penerbit Erlangga, Jakata.
6. Richard Bronson, 1993, ***Teori dan Soal-Soal Operations Research***, Seri Buku Schaum's, Penerbit Erlangga, Jakarta.
7. Sri Mulyono, 2007, ***Riset Operasi***, Edisi Revisi, Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta.
8. Zulian Yamit, 2003, ***Manajemen Kuantitatif Untuk Bisnis – Operations Research***, BPFE, Yogyakarta.