Fungsi Delta Dirac

Fungsi Delta Dirac $\delta(r)$ adalah fungsi yang luar biasa, karena hanya mempunyai nilai disatu titik, dan nol ditempat lain, dan hasil integralnya = 1.

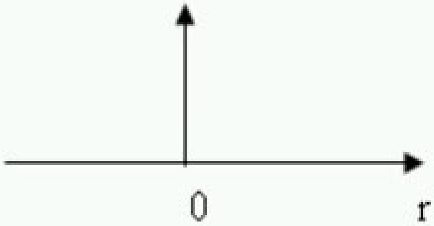
$$\delta(r) = \infty \ \textit{untuk}\ r = 0$$

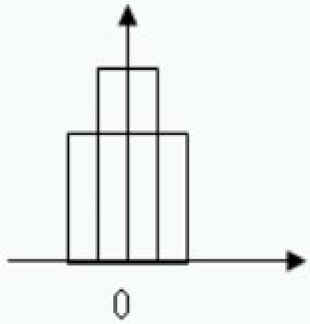
$$\delta(r) = 0 \ \textit{untuk}\ r \neq 0,$$

$$\int \delta(r')dv' = 1$$

$$\int_0^3 3r'\,\delta(r'-2) = 3.2 = 6$$

$$\int_0^3 3r'\,\delta(r'-4) = 0,\ \textit{karena}\ \text{di luar batas integral.}$$





Fungsi delta merupakan fungsi yang benar-benar singular memiliki nilai takhingga di satu titik, dan nol di tempat lain. Integral fungsi delta adalah satu, sedang integral dengan fungsi lain menghasilkan nilai fungsi di tempat tersebut atau bersifat mencuplik fungsi.

$$\int F(r')\delta(r')dr' = F(0)$$

$$\int F(r')\delta(r'-r_o)dr' = F(r_o)$$

Jadi, jika $\rho(r') = q_i\delta(r' - r_i)$ maka untuk muatan titik q_i di $\mathbf{r}_i$, menghasilkan potensial di $\mathbf{r}$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{q_i\delta(\mathbf{r'} - \mathbf{r_i})dv'}{|r - r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_i}{|r - r'|}$$

Berdasarkan hukum Gauss dalam bentuk diferensial:

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}}{\varepsilon_o}\rho$$

untuk muatan titik q di $\mathbf{r} = 0$

$$\nabla.\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{\varepsilon_o}q\,\delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla.\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

juga karena $\nabla.\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}.}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, maka $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$

Persamaan (2.52) dan (2.53) adalah fungsi delta yang diperoleh dari hukum Gauss, pendeferensialan seacara langsung diperoleh :

$$\begin{aligned}\nabla.\frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\mathbf{r} + \frac{1}{r^3}\nabla.\mathbf{r} \\ &= -\frac{3}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r}.\mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = 0,\ r \neq 0\end{aligned} \qquad (2.54)$$

di r = 0 , perhitungan menghasilkan -∞, + ∞.

Teorema divergensi yang diterapkan pada suatu bola berjari-jari R, yang terletak di titik asal, menghasilkan :

$$\int_v \nabla.\frac{\mathbf{r}}{r^3}dv = \oint_s \frac{\mathbf{r.n}}{r^3}da = \frac{1}{R^2}\oint_s da = 4\pi$$

Karena integral volum adalah 4π, integran dapat dinyatakan sebagai $4\pi\delta(r)$, sesuai (2.52). Dengan kata lain, fungsi delta memungkinkan penggunaan teorema divergensi pada r/r^3, sekalipun dalam daerah yang mengandung kesingularan di titik asal. Fungsi delta sangat berguna bila kita jumpai integral pada divergensi dari r/r^3 atau pada operator Laplace dari $1/r$.