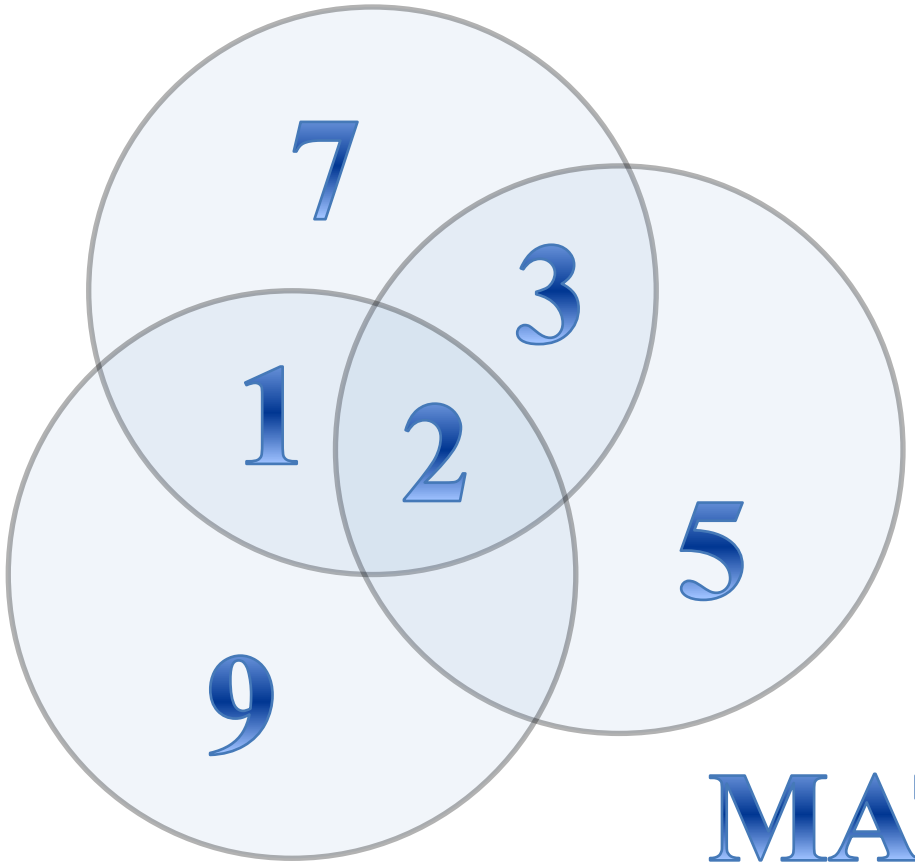


DISCRETE MATHEMATICS

2. Matrix, Relation and Function

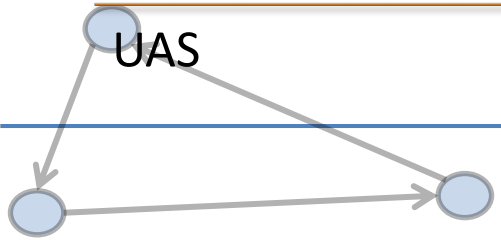
Discrete Mathematics

1. Set and Logic
2. Relation
3. **Function**
4. Induction
5. Boolean Algebra and Number Theory

MID

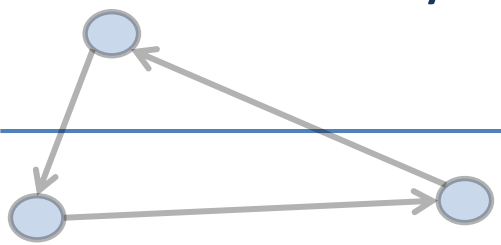
6. Graf dan Tree/Pohon
7. Combinatorial
8. Discrete Probability

UAS

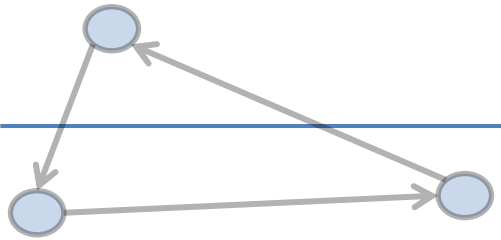


Previous Study

- Set :
  - Definition and characteristic of set ; Operation
- Logic :
  - Logic operation; Proofing ; Tautology and Contradiction
- Matrix :
  - Definition, Type, Size, Operation
- Relation :
  - Representation, Invers, Combination, Composition, Binary Relation, N-array Relation



MATRIX, RELATION AND FUNCTION



3. Function/Fungsi

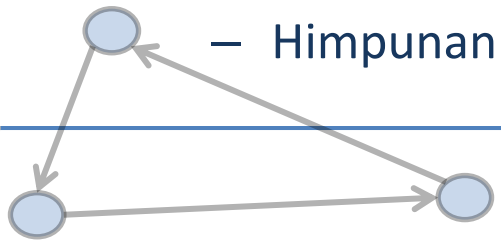
- 3.1. Definition
- 3.2 Type of Function
- 3.3 Invers
- 3.4 Function Composition
- 3.5 Specific Function

3.1 Function/Fungsi

Definition :

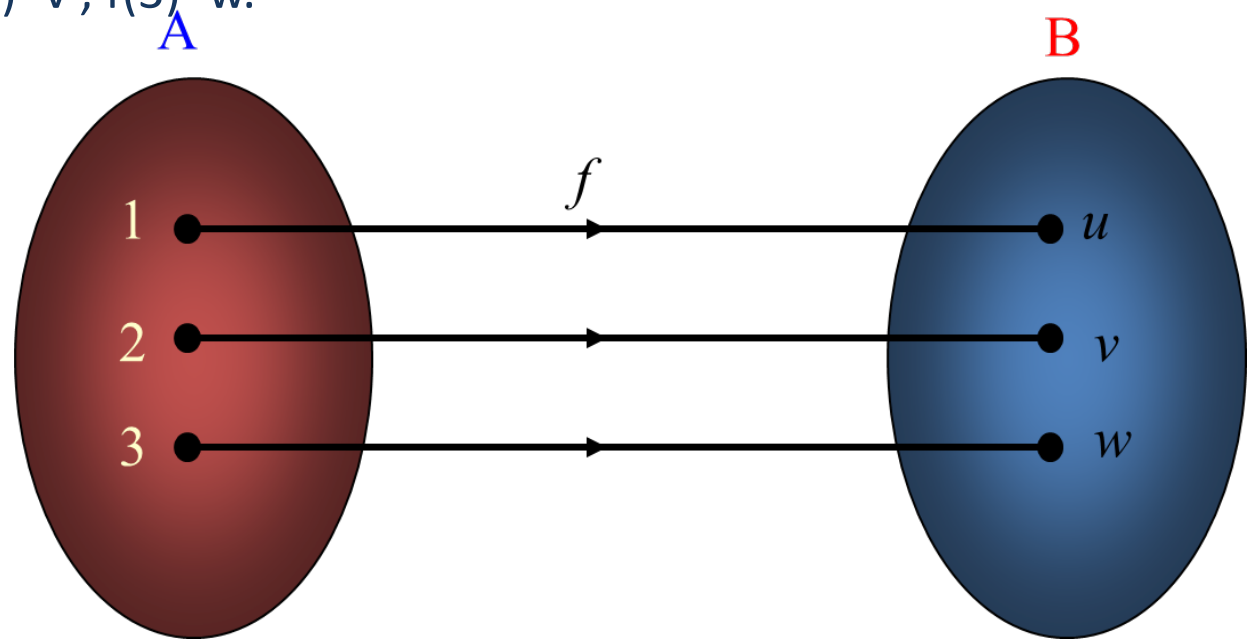
- Fungsi=Pemetaan=Transformasi
- Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner ***f*** dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan elemen di dalam B.
- Jika *f* adalah fungsi dari A ke B, kita menuliskan :

  $f : A \rightarrow B$ atau **f(a)=b**, yang artinya *f* memetakan A ke B
  - Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan
  - himpunan B disebut daerah hasil (codomain) dari f.
  - Jika f(a)=b , maka **b** dinamakan bayangan (image) dari **a**
  - **a** dinamakan pra-bayangan (pre-image) dari b
  - Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut jelajah (range)



Contoh Fungsi

- Relasi f = {(1,u),(2,v),(3,w)} dari A = {1,2,3} ke B = {u,v,w} adalah fungsi dari A ke B.
- Dimana :
  - f(1)=u , f(2)=v , f(3)=w.

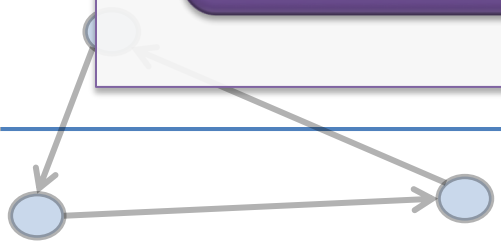


3.2 Jenis Fungsi

a. Fungsi Injektif (one-to-one),

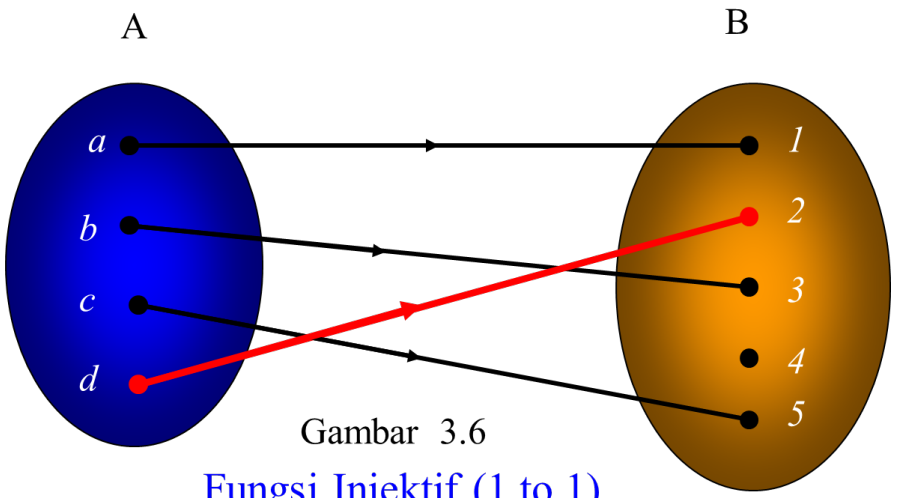
b. Fungsi Surjektif (on-to),

c. Bijeksi



a. Fungsi Injektif (one-to-one)

- Fungsi f dikatakan injektif jika
- tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama

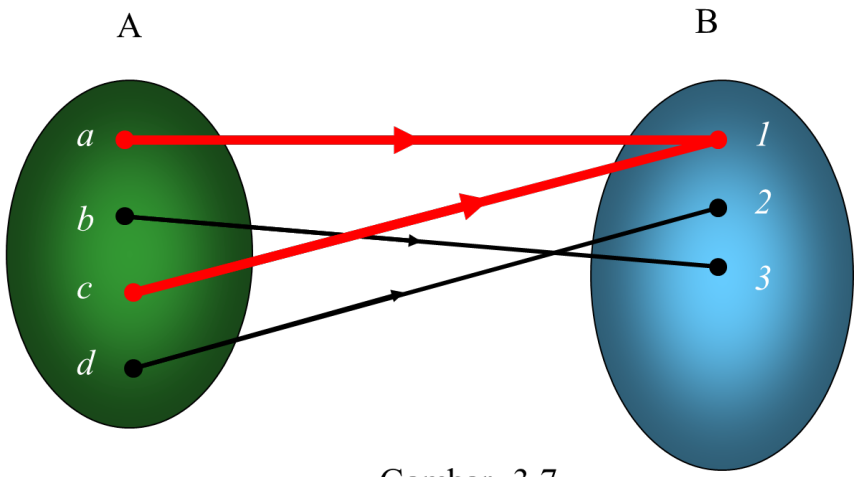


Gambar 3.6

Fungsi Injektif (1 to 1)

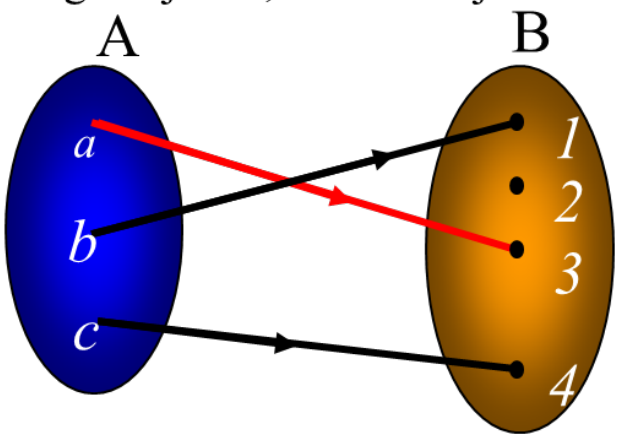
b. Fungsi Surjectif (on-to)

- Fungsi f dikatakan pada (*on-to*), atau surjektif
- jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A

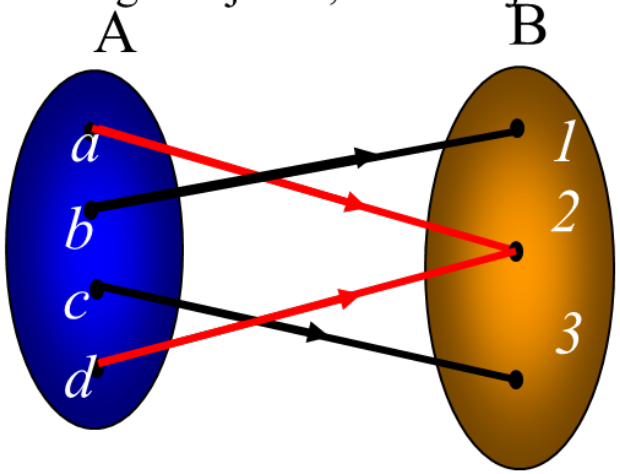


Gambar 3.7
Fungsi Surjektif (onto)

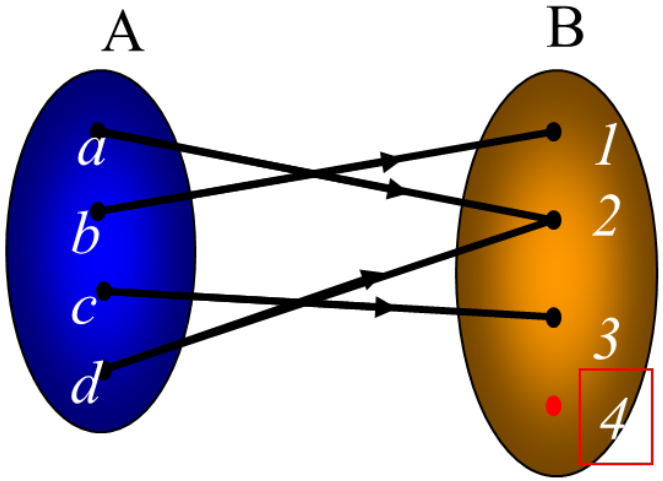
Fungsi Injektif, bukan Surjektif



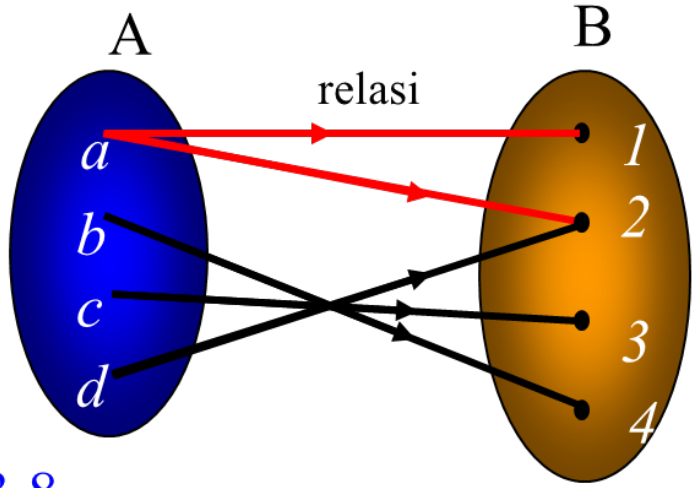
Fungsi Sujektif, bukan Injektif



Bukan fungsi Injektif, maupun Surjetif

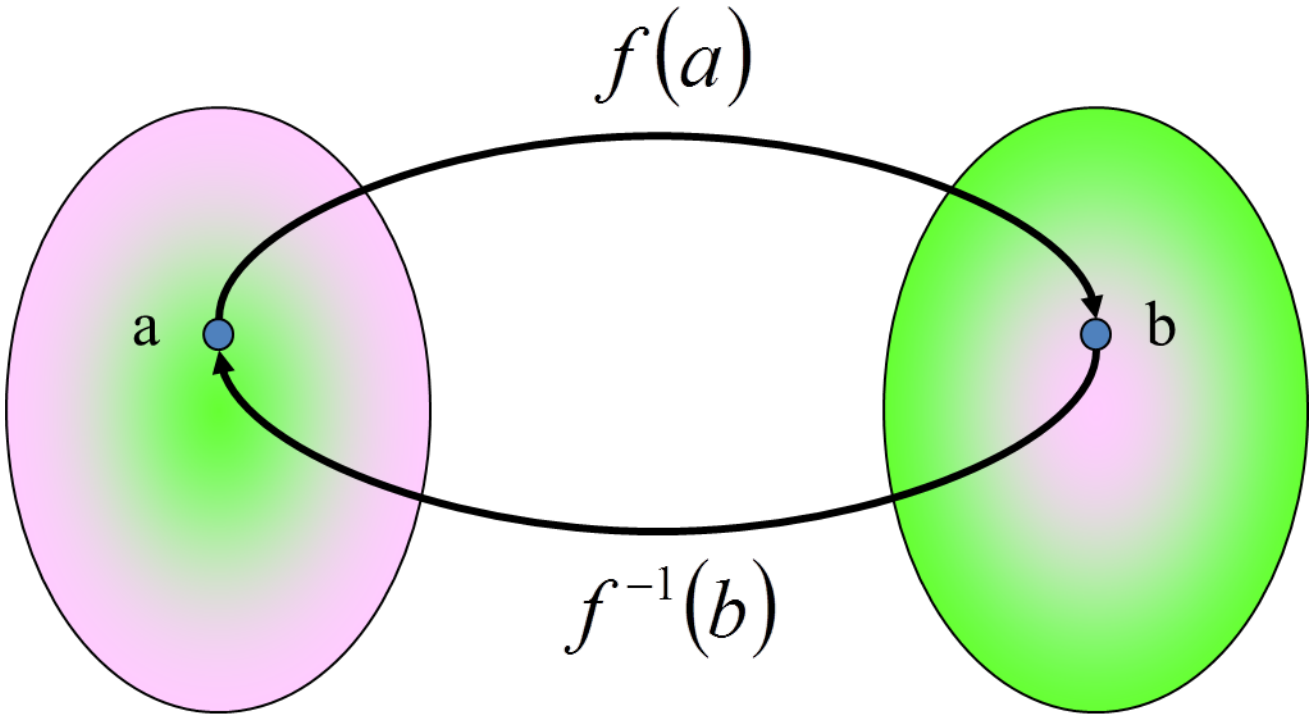


Bukan fungsi



Gambar 3.8

3.3 Fungsi Invers



Gambar 3.9

Fungsi Invers

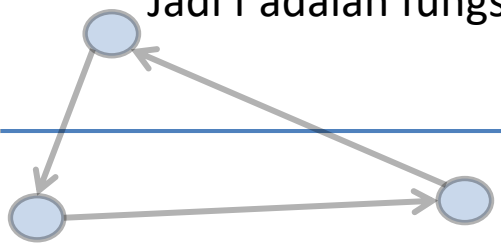
Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan balikan atau inversi (*invers*) dari fungsi f.
Fungsi inversi dari f dilambangkan dengan f^{-1}

Contoh 3.49

Relasi $f = \{(1,u),(2,v),(3,w)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu.

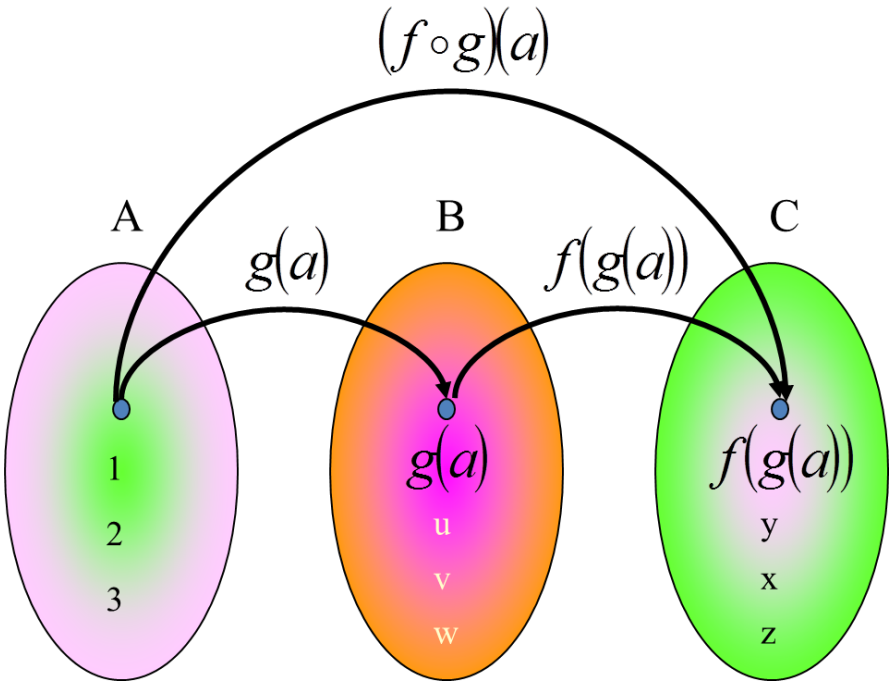
Inversi fungsi f adalah $f^{-1} = \{(u,1),(v,2),(w,3)\}$.

Jadi f adalah fungsi *invertible* (dapat dibalikkan).



Komposisi Fungsi

- Diberikan
  fungsi g = {(1,u),(2,v),(3,w)} yang memetakan A = {1,2,3} ke B = {u,v,w} dan
  fungsi f = {(u,y),(v,x),(w,z)} yang menyatakan B = {u,v,w} ke C = {y,x,z} .
- Fungsi komposisi dari A ke C adalah
- f o g = {(1,y),(2,x),(3,z)}

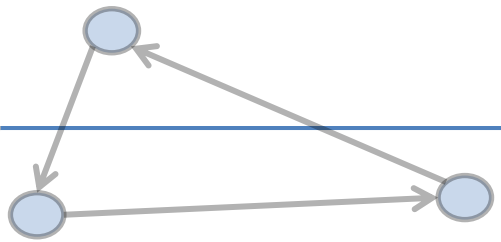


Komposisi Fungsi

Diberikan fungsi f(x)= x-1 dan $g(x) = x^2+1$.
Tentukan fog dan gof.

(i) (f o g)(x)
$= f(g(x))$
$= f(x^2+1)$
$= x^2+1-1$
$= x^2$

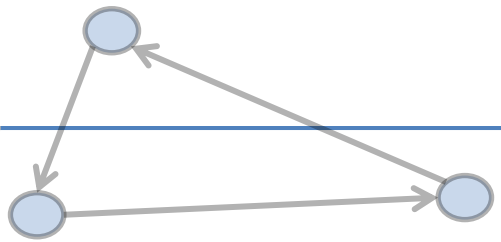
(ii)(g o f)(x)
$= g(f(x))$
$= g(x+1)$
$= (x+1)^2+1$
$= x^2-2x+2$



15. Beberapa Fungsi Khusus

Bagian ini memberikan beberapa fungsi yang dipakai di dalam ilmu komputer, yaitu fungsi :

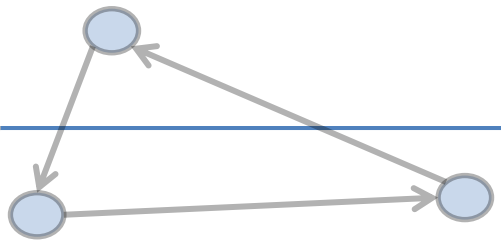
- Floor dan Ceiling
- Modulo
- Faktorial
- Perpangkatan
- Eksponensial dan Logaritmik



a. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat.

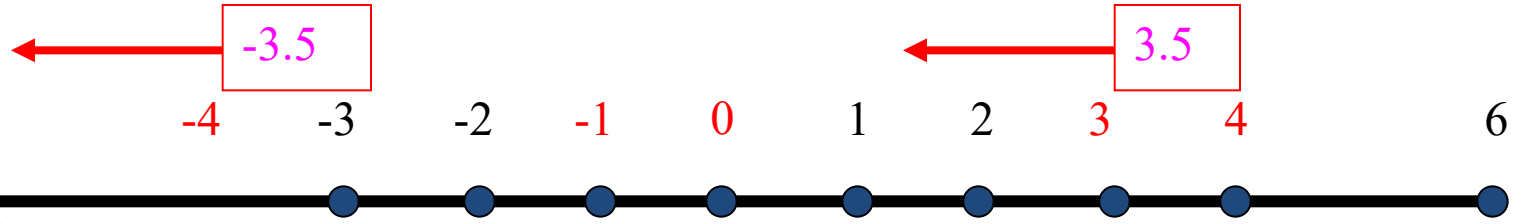
Fungsi floor dari x, dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$ dan fungsi ceiling dari x dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$.



Definisi fungsi floor dan ceiling adalah :

- $\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

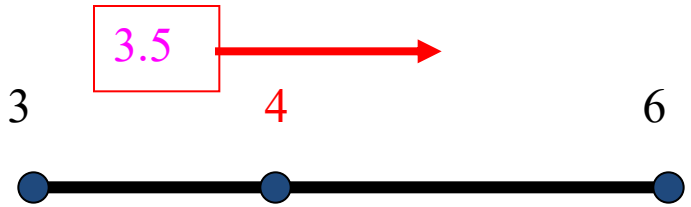
$$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$$
$$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$$
$$\lfloor 4.8 \rfloor = 4$$
$$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$$
$$\lfloor -3.5 \rfloor = -4$$



Definisi fungsi floor dan ceiling adalah :

- $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x.

$$\lceil 3.5 \rceil = 4$$
$$\lceil 0.5 \rceil = 1$$
$$\lceil 4.8 \rceil = 5$$
$$\lceil -0.5 \rceil = 0$$
$$\lceil -3.5 \rceil = -3$$



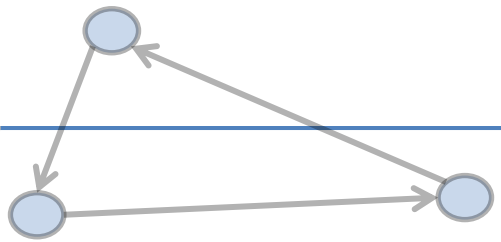
- Dengan kata lain, fungsi floor membulatkan x ke bawah, sedangkan fungsi ceiling membulatkan x ke atas.

b. Fungsi Modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan *m* adalah bilangan bulat positif.

Fungsi modulo adalah fungsi dengan operator **mod**, yang dalam hal ini :

a mod m memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m.



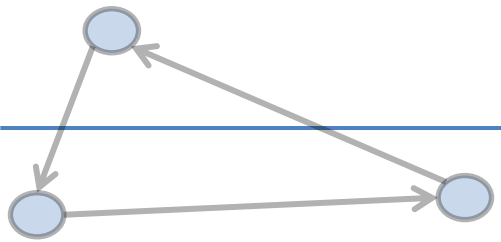
a mod m = r sedemikian sehingga
a = mq + r, dengan $0 \leq r \leq m$

Contoh 3.55 :

25 mod 7 = 4 →
15 mod 5 = 0
3612 mod 45 = 12

0 mod 5 = 0 → $\frac{0}{5} = 0 \; sisa \; 0$

-25 mod 7 = 3 → (sebab -25 = 7.(-4) + 3) $\frac{25}{7} = 3 \; sisa \; 4$
= -28 + 3
= -25

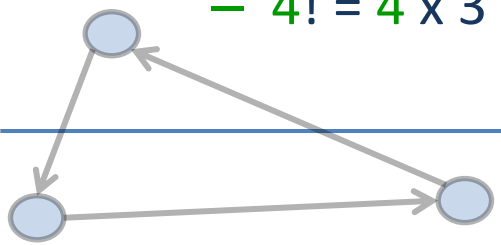


c. Fungsi Faktorial

- Untuk sembarang bilangan bulat tidak negatif n, faktorial dari n, dilambangkan dengan n!, didefinisikan sebagai :

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \; x \; 2 \; x \ldots x \; (n-1) x \; n & , n > 0 \end{cases}$$

- Contoh :
  - 0! = 1
  - 1! = 1
  - 2! = 2 x 1 = 2
  - 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24



d. Fungsi Eksponensial dan Logaritmik.

- Fungsi Eksponensial berbentuk :

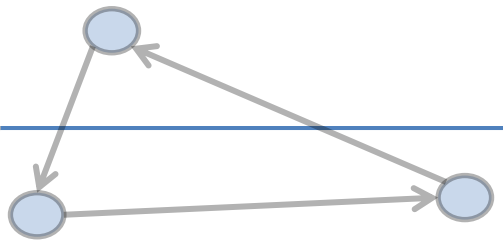
$$a^n = \begin{cases} 1 & ,n = 0 \\ a \; x \; a \; x \; a \; x ... x \; a & ,n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus Perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Fungsi Logaritma berbentuk :

$$y = {}^a\log x \leftrightarrow x = a^y$$



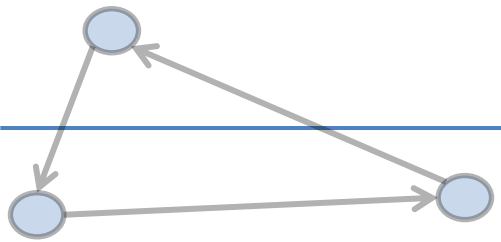
Fungsi Eksponensial dan Logaritmik

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$4^{-3} = \frac{1}{64}$$

$${}^4\log 64 = 3 \quad karena \quad 64 = 4^3$$

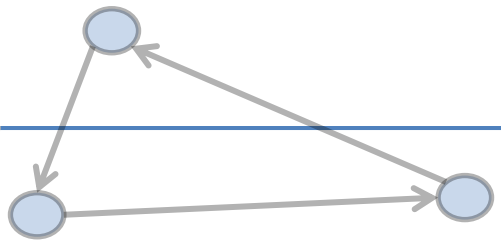
$$\left\lfloor {}^2\log 1000 \right\rfloor = 9 \quad karena \quad 2^9 = 512 \quad tetapi \quad 2^{10} = 1024$$



Fungsi Rekursif (relasi rekursif)

Definisi :

- Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika
  - definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.
- Fungsi rekursif adalah relasi rekursif, karena fungsi adalah bentuk khusus dari relasi.



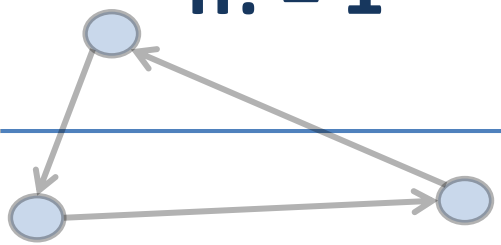
Fungsi Rekursif

a. Basis :

- Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri.
- Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif (dan memberikan sebuah nilai yang terdefinisi pada fungsi rekursif).
- **n! = 1 ,jika n = 0**

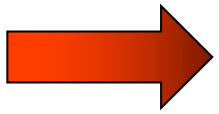
b. Rekurens :

- Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri.
- Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal/basis
- **n! = n x (n - 1) ! , jika n > 0**

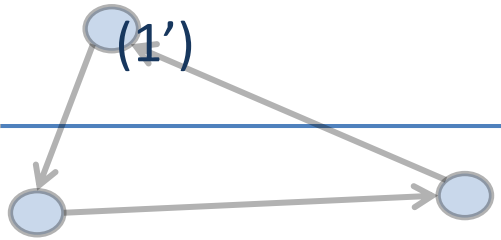


(1) $5! = 5 \times 4!$
(2) $4! = 4 \times 3!$
(3) $3! = 3 \times 2!$
(4) $2! = 2 \times 1!$
(5) $1! = 1 \times 0!$
(6) $0! = 1$

(6') $0! = 1$
(5') $1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$
(4') $2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$
(3') $3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$
(2') $4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$
(1') $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$



Jadi, $5! = 120$

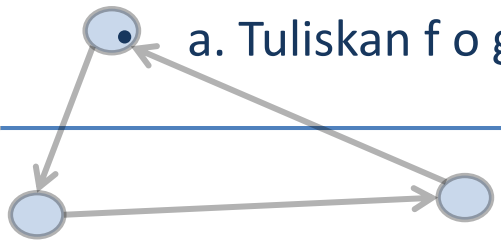
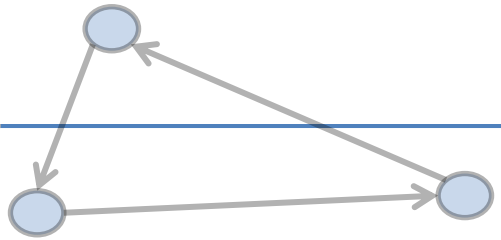


Soal 1

- Diberikan
  fungsi g = {(1,b),(2,c),(3,a),(4,b)} yang memetakan A = {1,2,3,4} ke B = {a,b,c,d} dan
  fungsi f = {(a,x),(b,y),(c,w),(d,z)} yang memetakan B = {a,b,c,d} ke C = {w,y,x,z} .
- a. Tuliskan f o g sebagai himpunan pasangan berurutan
- B. Apakah f, g, dan f o g bersifat injektif, surjektif, atau bijektif?

Soal 2

- Diberikan
  fungsi g = {(1,b),(2,c),(3,a)} yang memetakan A = {1,2,3} ke B = {a,b,c,d} dan
  fungsi f = {(a,x),(b,x),(c,z),(d,w)} sebagai fungsi dari B ke C = {w,y,x,z} .
- a. Tuliskan f o g sebagai himpunan pasangan berurutan



THANK YOU!