Pemodelan dan Simulasi – Pertemuan 8

Model Sistem Dinamis

Teaching Team

Universitas Dian Nuswantoro

Rencana Kegiatan Perkuliahan Semester

#	Pokok Bahasan
~~1~~	~~Pendahuluan~~
~~2~~	~~Pemodelan Simulasi Sistem Diskrit / *Discrete Event Simulation* (DES)~~
~~3~~	
~~4~~	~~Studi Kasus Sistem Diskrit: Sistem Antrian (*Queuing System*)~~
~~5~~	
~~6~~	
~~7~~	~~Responsi~~
	~~**Ujian Tengah Semester**~~

#	Pokok Bahasan
8	**Model Sistem Dinamis**
9	Kesalahan Komputasi
10	Model Gerakan dan Interaksi
11	Model Data Driven
12	Simulasi dengan Keacakan
13	Projek Akhir: Studi Kasus Simulasi
14	
	Ujian Akhir Semester

Contents

1
- Tingkat Perubahan

2
- Persamaan Diferensial

3
- Metode Euler

4
- Pemodelan dengan Diagram Stockflow

Tingkat Perubahan

- Kita berurusan dengan tingkat perubahan setiap saat. Misal kita sedang mengendarai mobil pada posisi (y) yang merupakan fungsi (s) terhadap waktu (t), yang dituliskan

$$y=s(t)$$

- Misal kita mulai berkendara pada jalanan lurus pada waktu $t = 0$ jam pada posisi $s(0) = 10$ mil, dan pada $t = 2$ jam kita berada pada posisi $s(2) = 116$ mil

Tingkat Perubahan

- Kecepatan rata-rata, atau tingkat perubahan rata-rata dari posisi terhadap waktu, adalah perubahan dalam posisi (**Δ*s***) atas perubahan dalam waktu (**Δ*t***) yang menggabungkan kelajuan rata-rata dan arah sebagai berikut:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{116 - 10}{2 - 0} = \frac{106}{2} = 53 mi / j$$

Tingkat Perubahan

- Mungkin kita tidak berkendara secara konstan pada 53mi/j, tetapi kadang bergerak lebih cepat atau lambat. Untuk mendapatkan pengukuran yang lebih akurat pada waktu t = 1 jam, kita bisa menggunakan interval yang lebih kecil
- Misal, pada waktu t 1= jam, posisi kita berada pada s(1) = 51.2 mil, sementara pada saat t= 0.98 jam posisi kita adalah s(0.98) = 50 mil

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{51.2 - 50}{1 - 0.98} = \frac{1.2}{0.02} = 60 mi / j$$

Tingkat Perubahan

- Misal s(t) adalah posisi sebuah objek pada waktu t, dimana $a \leq t \leq b$. Perubahan waktu $\boldsymbol{\Delta t = b - a}$, dan perubahan posisi $\boldsymbol{\Delta s = s(b) - s(a)}$
- Kecepatan rata-rata adalah tingkat perubahan rata-rata posisi s terhadap waktu t dari sebuah objek dari waktu a ke b

Tingkat Perubahan

- Dalam hal ini, turunan dari y = s(t) terhadap waktu t pada saat t = b, ditulis ***s'*(*b*)** atau $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=b}$, adalah kecepatan sesaat pada saat t = b.
- Seacara umum, turunan dari y = s(t) terhadap waktu ditulis sebagai ***s'*(*t*)**, atau $\frac{dy}{dt}$

Persamaan Diferensial

- Misal, terdapat sebuah populasi dimana perubahan populasi hanya disebabkan oleh kelahiran dan kematian.
- Jika tidak ada faktor pembatas, kita dapat menggunakan Model Malthusian untuk pertumbuhan tak terbatas, dimana tingkat perubahan populasi berbanding lurus dengan jumlah individu dalam populasi

Persamaan Diferensial

- Jika P adalah populasi dan t adalah waktu, maka kita dapat menuliskan:

$$\frac{dP}{dt} \propto P$$

- Untuk tingkat pertumbuhan positif, semakin besar populasi maka semakin besar pula perubahan populasi.

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

  konstanta r adalah tingkat pertumbuhan, sedangkan *dP/dt* adalah tingkat perubahan populasi

Metode Euler

- Metode Euler merupakan metode numerik orde pertama untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa
- Jika $P(t)$ adalah populasi pada waktu t dengan fungsi pertumbuhan $f(t,r)$ adalah tingkat pertumbuhan r terhadap populasi $P(t\text{-}\Delta t)$, maka:

$$\frac{dP}{dt} = f(t,P) = rP$$

$$P(t_{i\ +\ 1}) = P(ti) + \frac{dP_i}{dt_i} * \Delta t$$

Metode Euler

- Contoh:

  Estimasikan pertumbuhan tak terbatas dan populasi jika populasi awal adalah 100 dengan fungsi pertumbuhan adalah populasi dikali tingkat pertumbuhan sebesar 10%, dan $\Delta t = 0.005$

t	P(t)	f(P,r)
0.000	100	10
0.005	100.05	

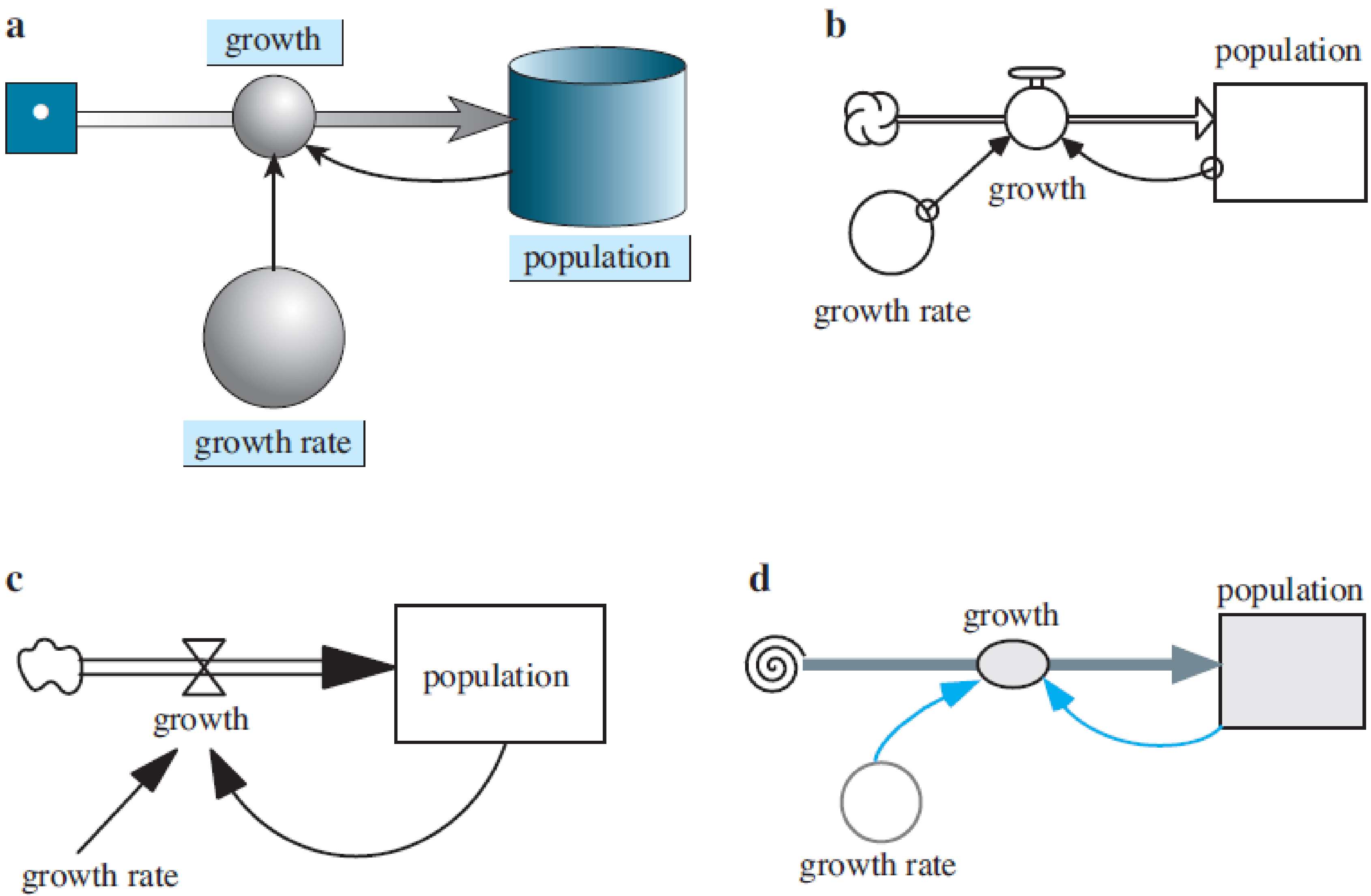
Metode Euler

- Contoh:

  Estimasikan pertumbuhan tak terbatas dan populasi jika populasi awal adalah 100 dengan fungsi pertumbuhan adalah populasi dikali tingkat pertumbuhan sebesar 10%, dan $\Delta t = 0.005$

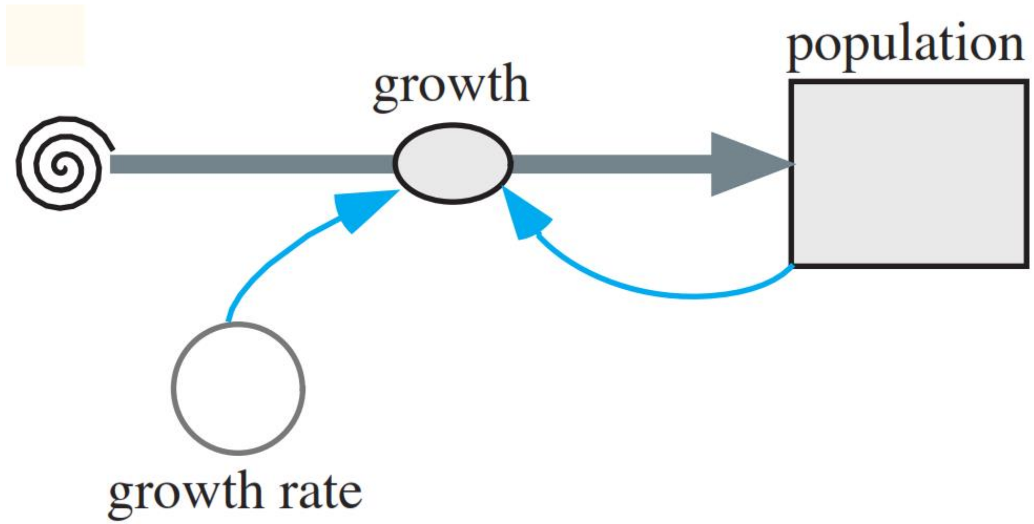
t	P(t)	f(P,r)
0.000	100	10
0.005	100.05	10.005
0.010	100.10003	10.010003
0.015	100.15008	10.015008
0.020	100.20015	10.020015
0.025	100.25025	10.025025
0.030	100.30038	

Pemodelan dg Diagram Stockflow



Pemodelan dg Diagram Stockflow

- Stock / reservoir
- Flow / rate
- Converter / formula
- Connector
- Source/Sink



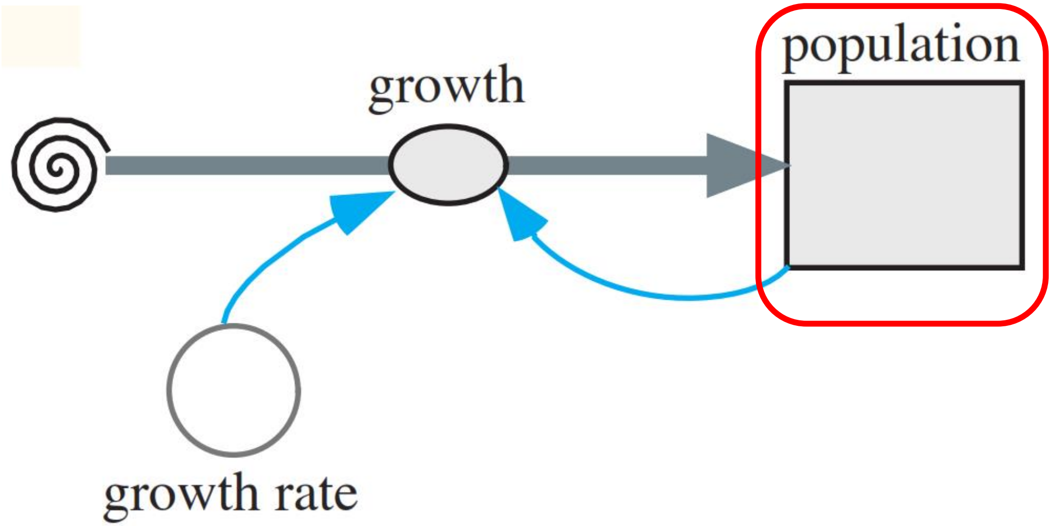
Population/Populasi	P
Growth Rate/Tingkat Pertumbuhan	r
Growth/Pertumbuhan (populasi terhadap waktu)	$\frac{dP}{dt} = P * r$

Pemodelan dg Diagram Stockflow

Stock

- Terakumulasi dengan waktu
- Memiliki parameter waktu
- Misal:

  populasi pada waktu t P**(t)**



$$\boxed{P(t)} = P(t-\Delta t) + \frac{dP}{dt} * \Delta t$$

$$\boxed{P(t)} = P(t-\Delta t) + f(P,t) * \Delta t$$

$$\boxed{P(t)} = P(t-\Delta t) + P(t-\Delta t) * r * \Delta t$$

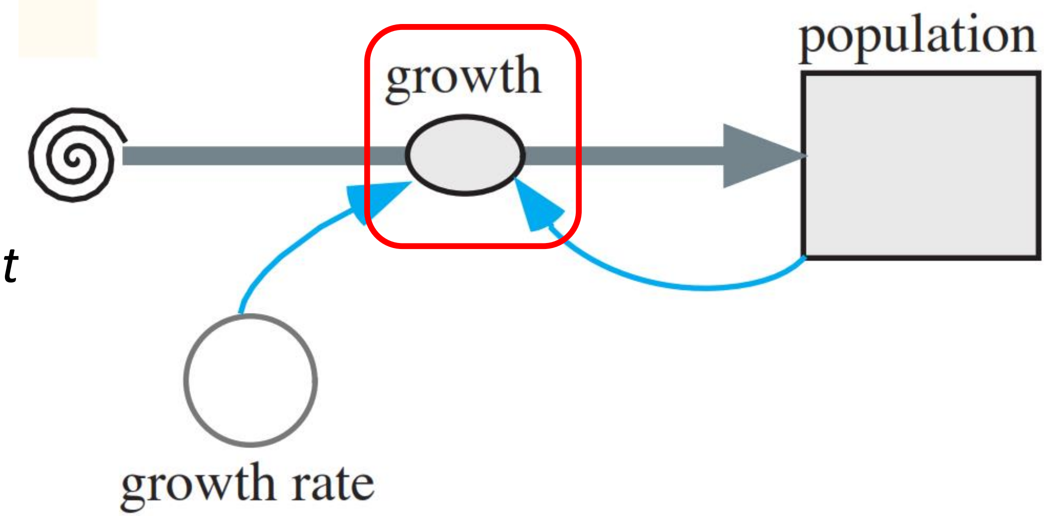
Pemodelan dg Diagram Stockflow

Flow

- Merubah nilai stock
- Berupa turunan
- Dioperasikan dengan perkalian Δt
- Misal:

  Pertumbuhan (populasi terhadap waktu)

$$\frac{dP}{dt} = f(t,P) = P * r$$



$$P(t) = P(t-\Delta t) + \frac{dP}{dt} * \Delta t$$

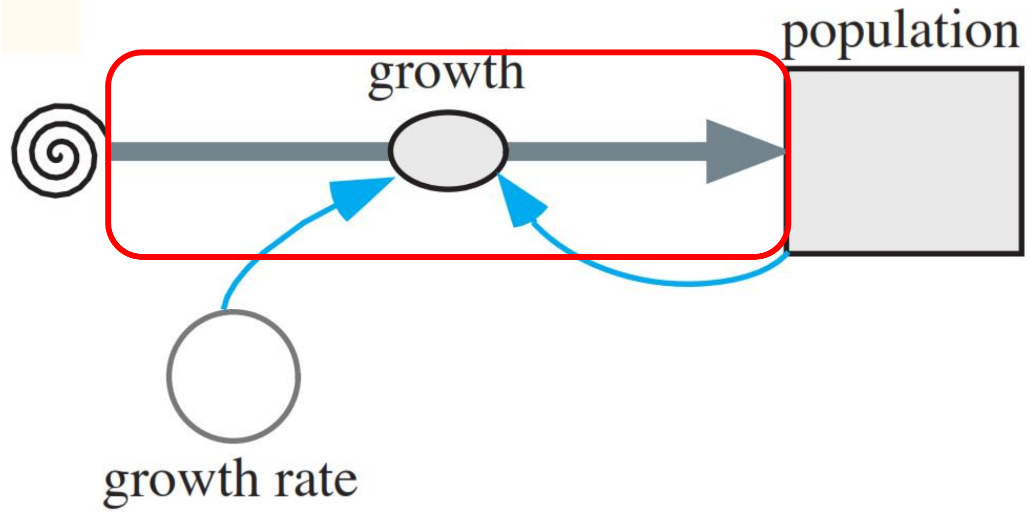
$$P(t) = P(t-\Delta t) + f(P,t) * \Delta t$$

$$P(t) = P(t-\Delta t) + P(t-\Delta t) * r * \Delta t$$

Pemodelan dg Diagram Stockflow

Flow

- Flow yang mengarah ke stock (inflow) berfungsi menambah nilai stock dan sebaliknya
- Source/Sink, Flow, dan Stock terhubung dengan panah /aliran utama sistem



$$P(t) = P(t-\Delta t) + \boxed{\frac{dP}{dt} * \Delta t}$$

$$P(t) = P(t-\Delta t) + \boxed{f(P,t) * \Delta t}$$

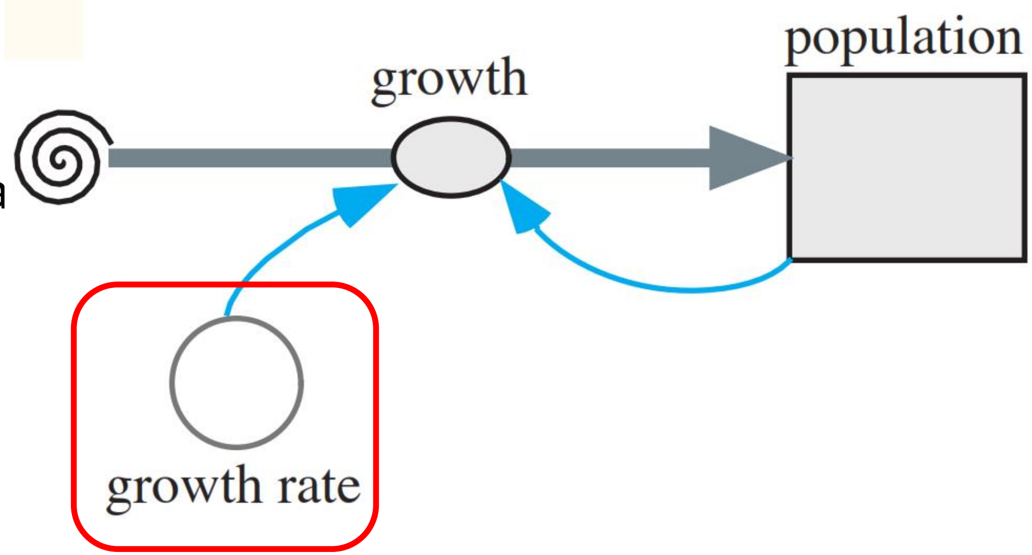
$$P(t) = P(t-\Delta t) + P(t-\Delta t) * r * \Delta t$$

Pemodelan dg Diagram Stockflow

Converter

- Tidak terakumulasi waktu
- Tidak dapat merubah stock secara langsung
- Berupa variabel, konstanta atau persamaan
- Misal:

  Tingkat pertumbuhan
  r



$$P(t) = P(t - \Delta t) + \frac{dP}{dt} * \Delta t$$

$$P(t) = P(t - \Delta t) + f(P,t) * \Delta t$$

$$P(t) = P(t - \Delta t) + P(t - \Delta t) \boxed{* r *} \Delta t$$

Pemodelan dg Diagram Stockflow

Arrow/Connector

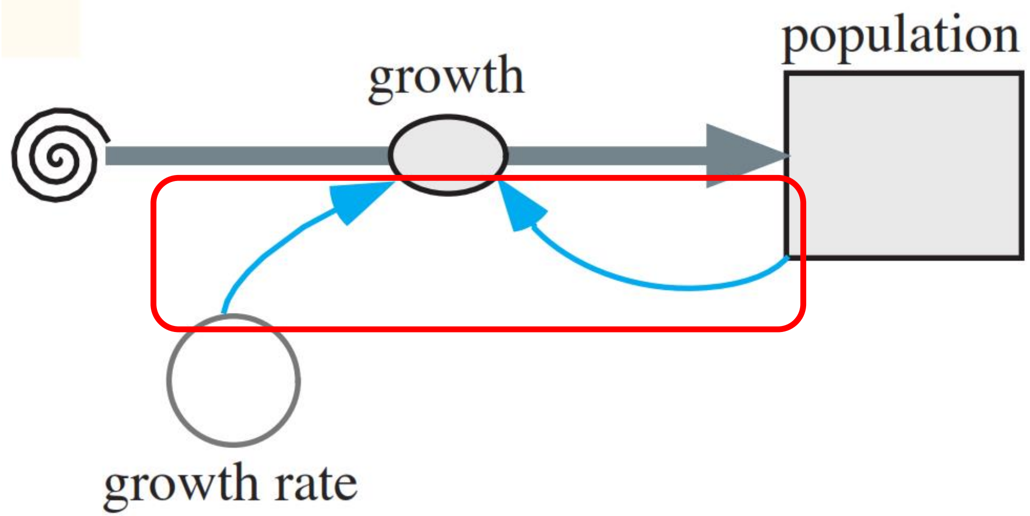
- Menghubungkan komponen pembentuk
- Misal:

  $\frac{dP}{dt}$ dibentuk dari

  P dan *r*,

  maka P dan r

  terhubung ke $\frac{dP}{dt}$



$$P(t) = P(t-\Delta t) + \frac{dP}{dt} * \Delta t$$

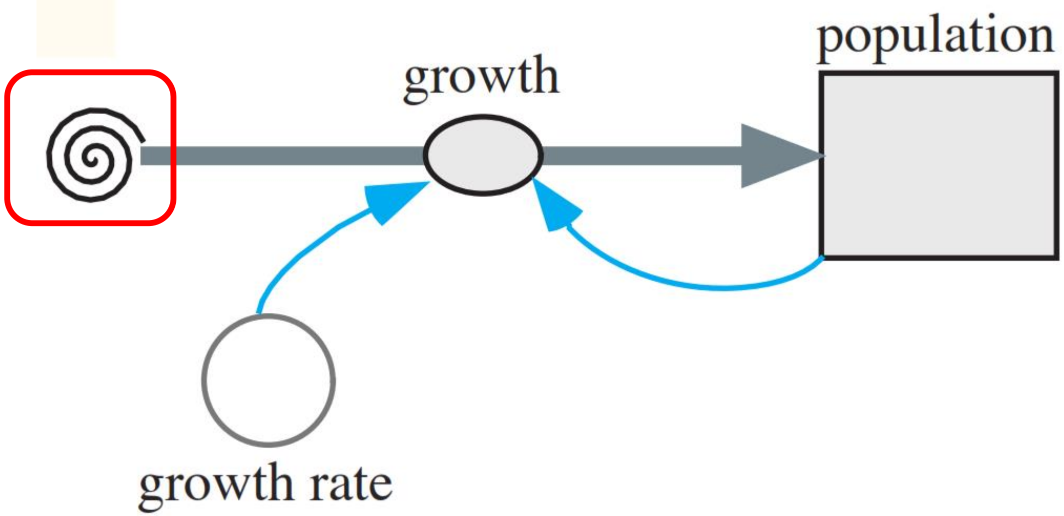
$$P(t) = P(t-\Delta t) + f(P,t) * \Delta t$$

$$P(t) = P(t-\Delta t) + P(t-\Delta t) * r * \Delta t$$

Pemodelan dg Diagram Stockflow

Source & Sink

- Komponen diluar sistem
- Berfungsi untuk menunjukkan sumber aliran dan keluaran sistem



$$P(t) = P(t-\Delta t) + \frac{dP}{dt} * \Delta t$$

$$P(t) = P(t-\Delta t) + f(P,t) * \Delta t$$

$$P(t) = P(t-\Delta t) + P(t-\Delta t) * r * \Delta t$$

Implementasi Kasus Pertumbuhan

Algorithm 1 Algorithm for simulation of unconstrained growth

initialize *simulationLength*

initialize *population*

initialize *growthRate*

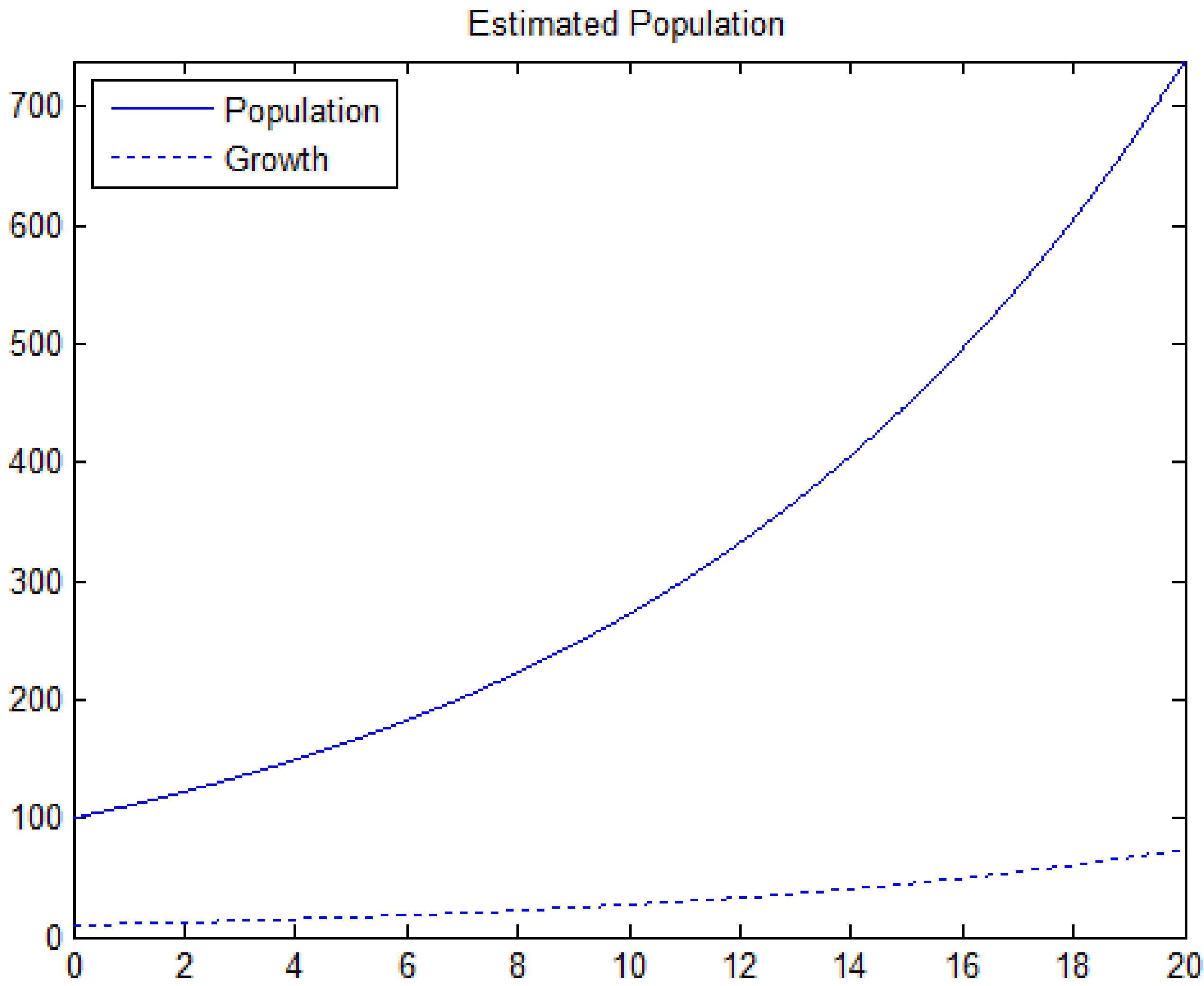
initialize length of time step Δt

numIterations ← *simulationLength*/Δt

for *i* going from 1 through *numIterations* do the following:

> *growth* ← *growthRate* * *population*
>
> *population* ← *population* + *growth* * Δt
>
> $t \leftarrow i * \Delta t$
>
> display *t*, *growth*, and *population*

Implementasi Kasus Pertumbuhan



Latihan (Pertumbuhan Terbatas)

Diketahui populasi pada luas wilayah dan sumber daya terbatas dengan populasi awal P(0) = 100, tingkat pertumbuhan r = 10%, fungsi pertumbuhan $\frac{dP}{dt} = P * r$ dan fungsi kematian $\frac{dD}{dt} = \left(r\frac{P}{M}\right)P$ dimana M adalah daya tampung wilayah sebesar 500 dan perubahan populasi ΔP = pertumbuhan – kematian. Gambarkan model dan dan simulasikan kasus tersebut dengan metode Euler hingga t = 20 dengan $\Delta \mathrm{t} = 0.5$!

Sekian

TERIMAKASIH