Pemodelan dan Simulasi – Pertemuan 9

Kesalahan Komputasi

Teaching Team

Universitas Dian Nuswantoro

Rencana Kegiatan Perkuliahan Semester

#	Pokok Bahasan
~~1~~	~~Pendahuluan~~
~~2~~, ~~3~~	~~Pemodelan Simulasi Sistem Diskrit / *Discrete Event Simulation* (DES)~~
~~4~~, ~~5~~, ~~6~~	~~Studi Kasus Sistem Diskrit: Sistem Antrian (*Queuing System*)~~
~~7~~	~~Responsi~~
	~~Ujian Tengah Semester~~

#	Pokok Bahasan
~~8~~	~~Model Sistem Dinamis~~
9	**Kesalahan Komputasi**
10	Model Gerakan dan Interaksi
11	Model Data Driven
12	Simulasi dengan Keacakan
13, 14	Projek Akhir: Studi Kasus Simulasi
	Ujian Akhir Semester

Contents

Solusi Analitik

- Kita dapat menyelesaikan model pertumbuhan tak terbatas yang mempunyai persamaan diferensial dP/dt = rP with P_0 = 100 melalui solusi analitik untuk mendapatkan nilai tepat sebagai berikut:

$$\frac{1}{P}dP = rdt$$

$$\int \frac{1}{P}dP = \int rdt$$

$$\begin{aligned} \ln|P| &= rt + C \\ e^{\ln|P|} &= e^{rt+C} \\ |P| &= e^{rt}e^{C} \\ &= ke^{rt} \end{aligned}$$

Solusi Analitik

- Secara umum, solusi untuk persamaan:

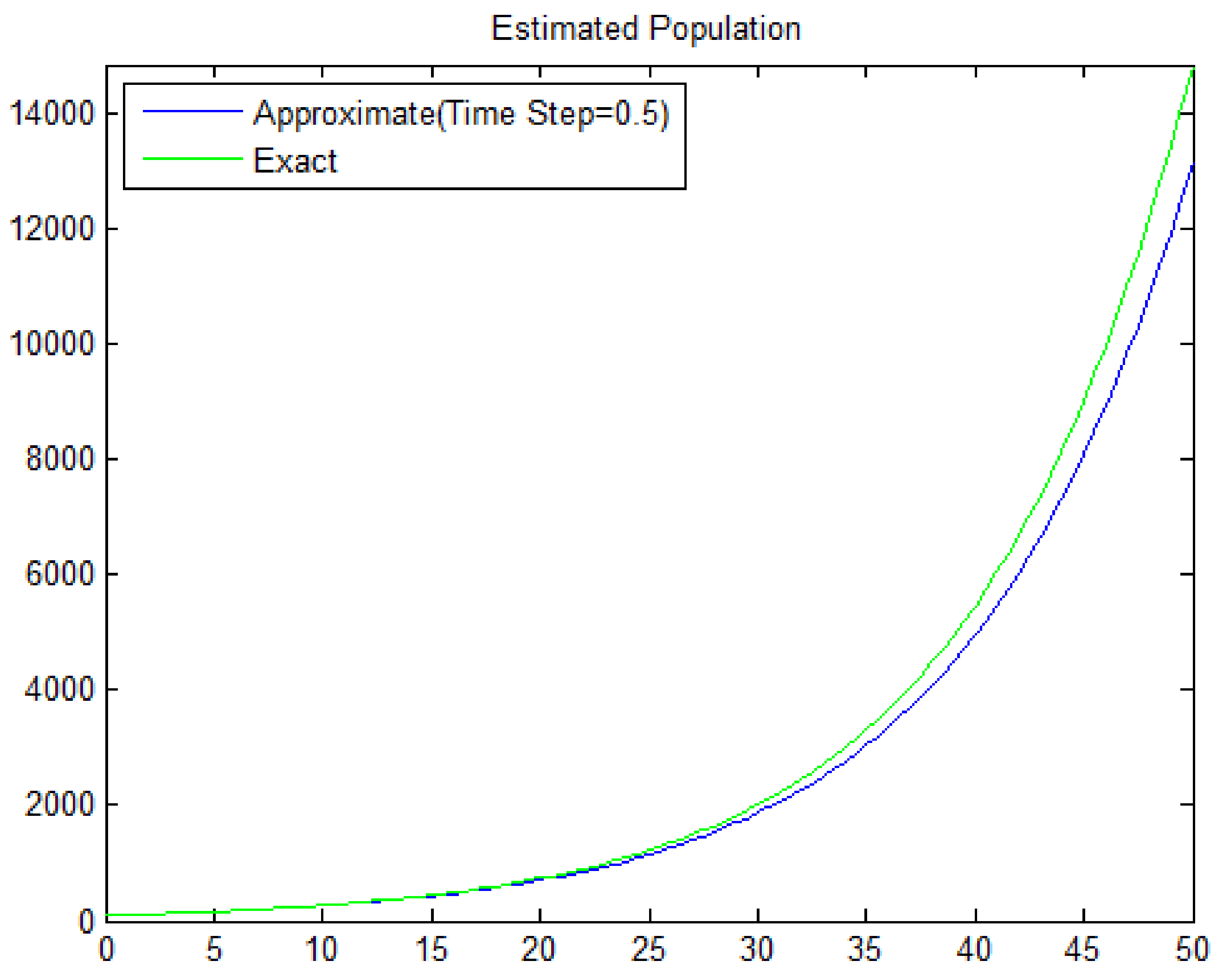
$$\frac{dP}{dt} = rP$$

Dengan populasi awal P_0 adalah:

$$P = P_0 e^{rt}$$

Solusi analitik digunakan jika memungkinkan

Nilai Tepat



Estimated Population
Approximate(Time Step=0.5)
Exact
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Error

- Dalam proses komputasi terdapat beberapa jenis error (kesalahan), antara lain
  - Absolute dan Relative Error
  - Round-off Error
  - Overflow dan Underflow
  - Arithmetic Error
  - Trunctaion Error

Error

- Round-off Error

  Kurangnya jumlah bit yang digunakan untuk menyimpan nilai *float*, sehingga nilai dibulatkan ke nilai terdekat

- Overflow

  Kurangnya jumlah bit untuk mengekspresikan nilai

- Underflow

  Nilai terlalu kecil untuk ditampilkan

- Truncation Error

  Pemotongan atau nilai berhingga yang digunakan sebagai pendekatan pada nilai tak hingga

Relative Error

- Absolute error adalah nilai mutlak dari perbedaan nilai exact(tepat) dengan nilai hasil komputasi
- Relative Error adalah absolute error dibagi dengan nilai mutlak dari nilai exact

$$absolute\ error = |correct - result|$$

$$relative\ error = \frac{absolute\ error}{|correct|}$$

Relative Error

Contoh:

- Misal kita memperoleh hasil perhitungan dari
  $(0.356 \times 10^{7})(0.228 \times 10^{-3})$
  $= (0.356)(0.228)(10^{7})(10^{-3})$
  $= 0.081168 \times 10^{4}$
- Sehingga diperoleh nilai tepat (*correct*)= 0.081168×10^{4}
- Jika komputer memiliki akurasi 3 digit desimal, maka diperoleh nilai hasil (*result*)=0.0811×10^{4}

Relative Error

Contoh:

- Absolute Error:
  $= |correct - result|$
  $= |0.081168 \times 10^4 - 0.0811 \times 10^4|$
  $= 0.000068 \times 10^4$
  $= 0.68$
- Relative Error
  $= (0.000068 \times 10^4)/(0.081168 \times 10^4)$
  $= 0.0008378$
  = **0.083**78**%**

Relative Error

Latihan:

- Hitung Absolute dan Relative Error jika komputer memiliki akurasi 2 digit desimal!

Runge Kutta 2 (Heun)

- Metode Runge Kutta 2 merupakan perbaikan dari Metode Euler
- Menggunakan metode Euler sebagai *predictor* lalu menghitung garis miring (*slope of the cord*) untuk mendapatkan nilai yang lebih baik (*corrected*)
- Metode Runge Kutta 2 juga disebut sebagai Euler's Predictor Corrector (EPC)

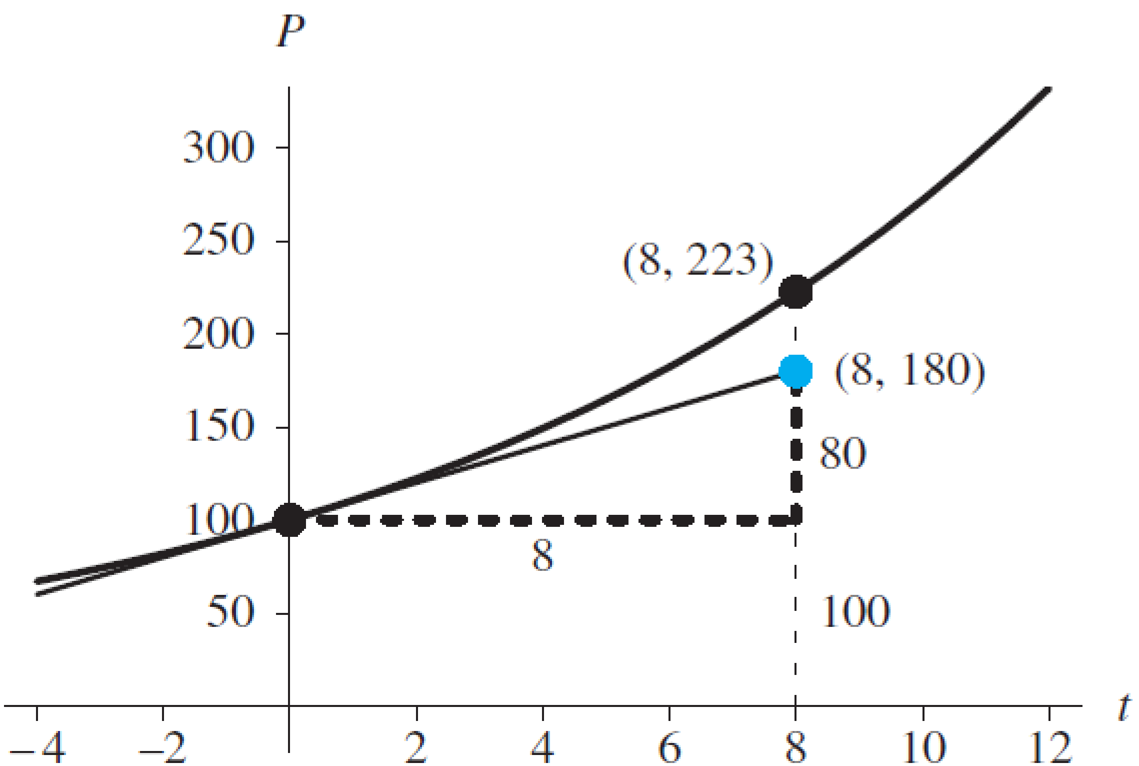
Runge Kutta 2 (Heun)

- Pada contoh kasus sebelumnya dengan metode Euler, diketahui bahwa $P_0 = 100$ dan $dP/dt=0.1P$, sehingga:

fungsi pertumbuhan	$f(tn, Pn)$
pada	$(t, P) = (0,100)$
adalah	$f(0, 100) = 0.1(100) = 10$

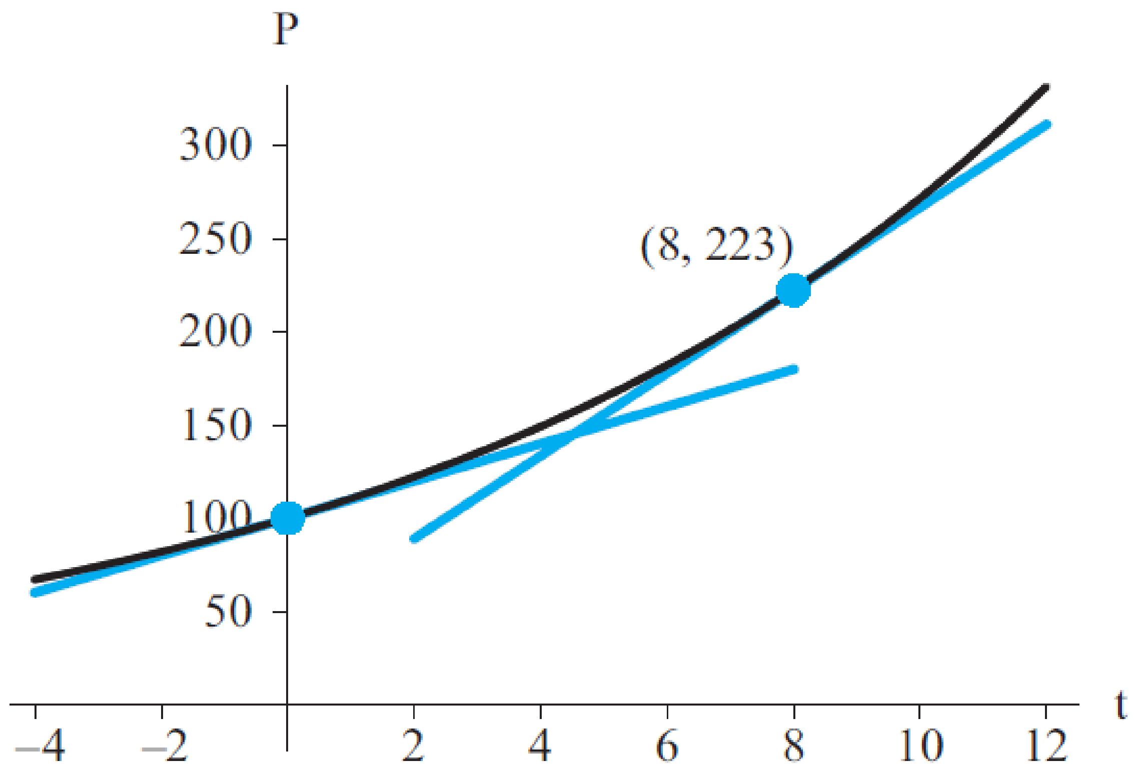
Runge Kutta 2 (Heun)

- Jika t_0 = 0 and Δt = 8 perkiraan nilai pada t_1 = 8 berupa titik pada garis singgung 100 + 8(10) = **180**
- Nilai tepa



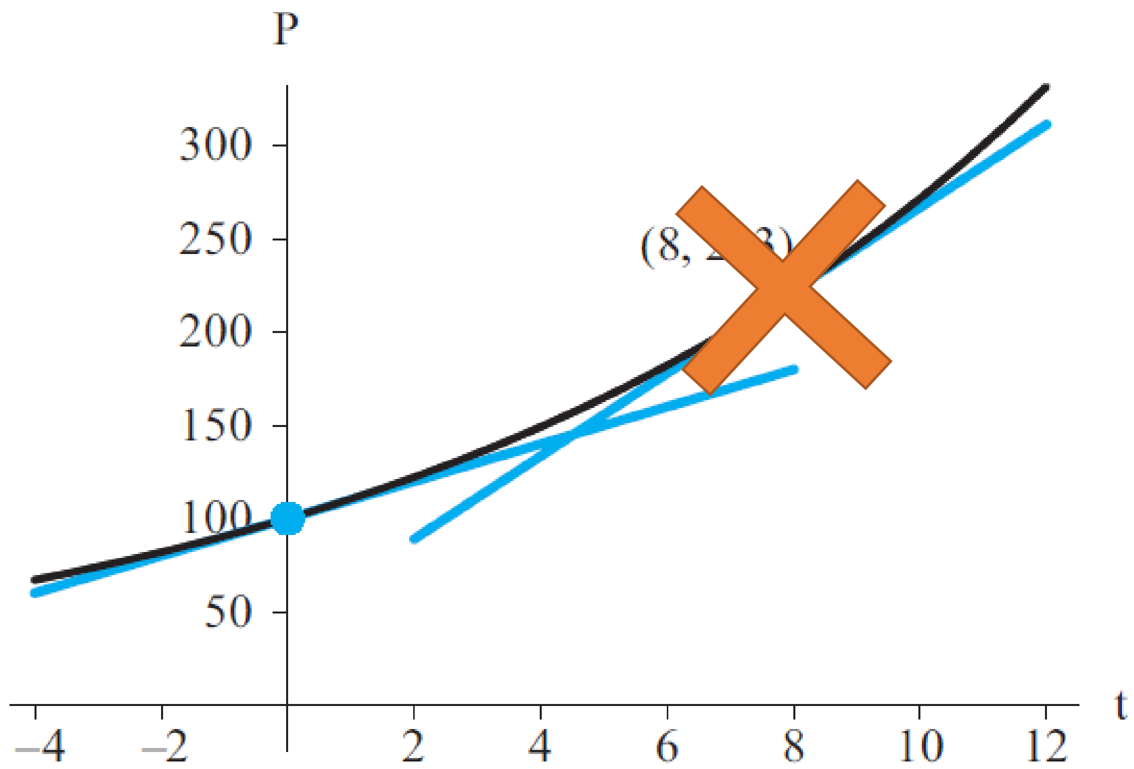
Runge Kutta 2 (Heun)

- Untuk memperoleh perkiraan yang lebih akurat, kita dapat menggunakan garis singgung pada (0,P(0)) dan (**8**,P(**8**)) **?**



Runge Kutta 2 (Heun)

- **Tidak**, karena kita belum mengetahui nilai *P*(8)



Runge Kutta 2 (Heun)

- Sebagai solusi kita dapat menggunakan metode Euler terlebih dahulu, sebagai nilai *predictor* (Y)

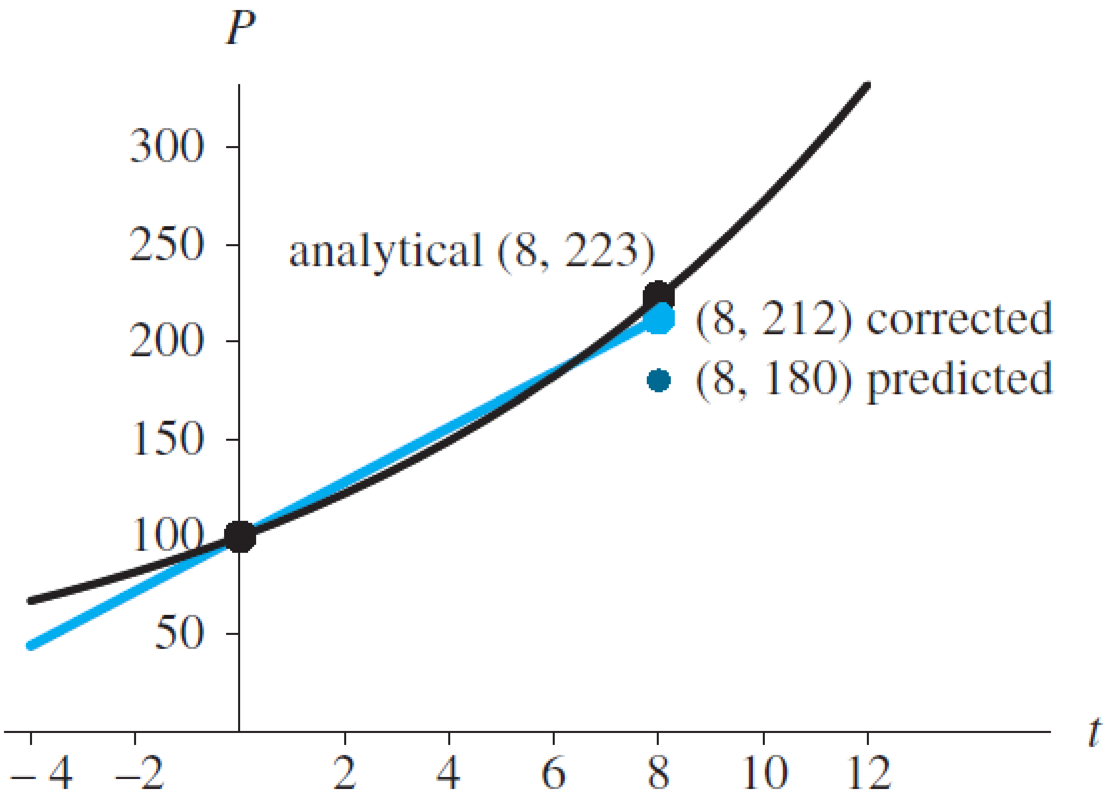
  Yakni Y = P(8) =180

  Dengan pertumbuhan $f(8, 180) = 0.1(180) = 18$
- Sehingga diperoleh garis miring antara (0, P(0)) and (8, P(8)) yang merupakan nilai rata-rata:

$$(10 + 18)/2 = 0.5(10 + 18) = 14$$

Runge Kutta 2 (Heun)

- Dan diperoleh nilai pendekatan yang lebih baik (*corrected estimate*) $P_1 = 100 + 14(8) = 212$



Runge Kutta 2 (Heun)

Latihan:

- Diketahui populasi awal $P(0)$ adalah 100 dengan fungsi pertumbuhan adalah $0.1P$ dan $\Delta t = 0.5$, maka:
  - Hitung populasi pada saat t=3 dengan metode Euler
  - Hitung dengan metode Rungge Kutta 2
  - Hitung relative error dari kedua metode tersebut terhadap nilai tepat: $100e^{0.10(3)} \approx 134.986$

Contoh :

Diketahui PDB :

$$\frac{dy}{dx} = x + y; y(0) = 1$$

Dengan metode Euler, tentukan nilai $y(0.10)$ dengan menggunakan $\Delta x = 0.02$.

Runge Kutta 2 (Heun)

Latihan:

- Diketahui populasi awal $P(0)$ adalah 100 dengan fungsi pertumbuhan adalah $0.1P$ dan $\Delta t = 0.5$, maka:
  - Hitung populasi pada saat t=3 dengan metode Euler
  - Hitung dengan metode Rungge Kutta 2
  - Hitung relative error dari kedua metode tersebut terhadap nilai tepat: $100e^{0.10(3)} \approx 134.986$

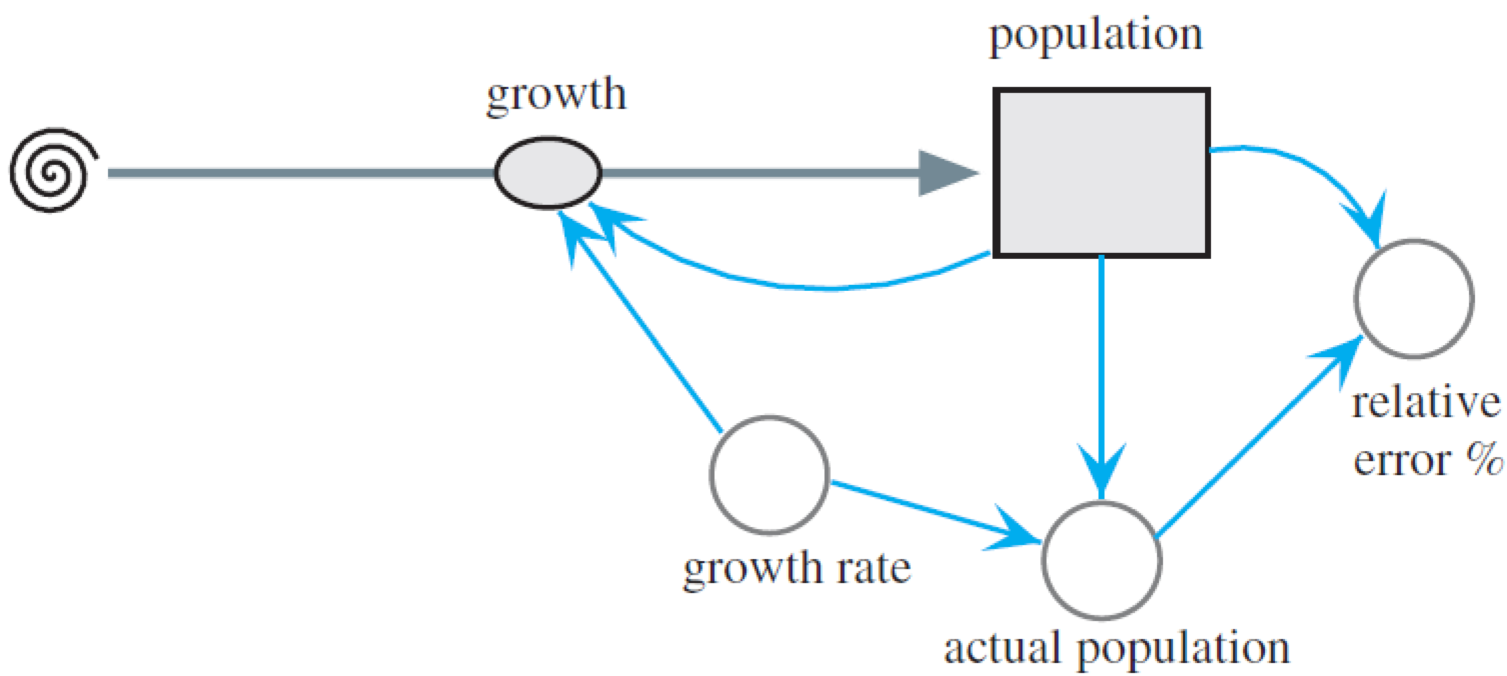
Runge Kutta 2 (Heun)

Latihan:

- Diketahui populasi awal $P(0)$ adalah 100 dengan fungsi pertumbuhan adalah $0.1P$ dan $\Delta t = 0.5$, maka:
  - Hitung populasi pada saat t=3 dengan metode Euler
  - Hitung dengan metode Rungge Kutta 2

Pemodelan dengan Evaluasi

- Nilai error yang terlalu besar dapat mengakibatkan hasil simulasi jauh dari yang diharapkan
- Diperlukan evaluasi model yang dibuat untuk melakukan validasi model



Pemodelan dengan Evaluasi

Latihan:

- Berdasarkan persoalan pertumbuhan sebelumnya, hitung relative error dari metode Euler dan Runge Kutta 2 terhadap terhadap nilai tepat P(3) = $100e^{0.10(3)} \approx 134.986$
- Implementasikan model pertumbuhan dengan evaluasi tersebut ke dalam program

Sekian

TERIMAKASIH