Bab 2

DISTRIBUSI PELUANG

PENDAHULUAN

Setiap peristiwa akan mempunyai peluangnya masing-masing, dan peluang terjadinya peristiwa itu akan mempunyai penyebaran yang mengikuti suatu pola tertentu yang di sebut dengan distribusi.

Distribusi peluang untuk suatu variabel acak menggambarkan bagaimana peluang terdistribusi untuk setiap nilai variabel acak.

Distribusi peluang didefinisikan dengan suatu fungsi peluang, dinotasikan dengan p(x) atau f(x), yang menunjukkan peluang untuk setiap nilai variabel acak.

Ada dua jenis distribusi, sesuai dengan variabel acaknya.

Jika variabel acaknya variabel diskrit, maka distribusi peluangnya adalah distribusi peluang diskrit,

Sedangkan jika variabel acaknya variabel yang kontinu, maka distribusi peluangnya adalah distribusi peluang kontinu.

VARIABEL ACAK

Variabel acak

Sebuah ukuran atau besaran yang merupakan hasil suatu percobaan atau kejadian yang terjadi acak atau untung-untungan dan mempunyai nilai yang berbeda-beda.

Variabel acak diskret

Ukuran hasil percobaan yang mempunyai nilai tertentu dalam suatu interval.

Variabel acak kontinu

Ukuran hasil percobaan yang mempunyai nilai yang menempati seluruh titik dalam suatu interval.

DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

Adalah sebuah tabel atau rumus yang mencantumkan semua kemungkinan nilai variabel acak diskrit dan nilai peluangnya

Syarat:

1. $0 \leq p(x) \leq 1$, nilai peluang antara 0 dan 1
2. $\sum_{i=0}^{\infty} p(x) = 1$, jumlah total peluang pada sebuah kejadian sama dengan 1

Distribusi peluang diskrit dapat digambarkan dalam bentuk tabel, grafik, maupun persamaan.

<u>Contoh</u> :

1. Tentukan rumus distribusi peluang banyaknya sisi gambar bila sebuah uang logam dilempar 3 kali. Buatlah tabelnya ?

   Eksperimen :

   pelemparan 1 mata uang 3x, Banyaknya titik sampel = 2^3 = 8

   S ={AAA, AAG, AGG, GGG, AGA, GAG, GAA, GGA}

Banyaknya muncul sisi gambar adalah $\binom{3}{x}$

Jadi fungsi peluang adalah :

$$f_{(x)} = \frac{\binom{3}{x}}{8}$$

Untuk x = 0,1,2,3

Tabel distribusi peluang :

Harga x	0	1	2	3
Prob x = f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$= 1$

2. Sebuah dadu dilemparkan 2x

Misalkan : x = jumlah titik dadu dalam kedua lemparan itu, maka

x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Tabel distribusi probabilitas x :

Harga x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prob x = f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

a) $P(x>8) = P(x=9)+P(x=10)+P(x=11)+P(x=12)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36}$$

b) $P(4<x<7) = P(x=5) + P(x=6)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36}$$

DISTRIBUSI BINOMIAL

Sifat percobaan Binomial

* Percobaan dilakukan dalam n kali ulangan yang sama.
* Kemungkinan yang terjadi pada tiap ulangan hanya ada 2, yaitu "sukses" atau "gagal".
* Probabilitas "sukses" yang dinotasikan dengan p selalu tetap pada tiap ulangan.
* Tiap ulangan saling bebas (independent).

Fungsi Peluang Binomial

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

dimana :

p : probabilitas sukses sebuah percobaan,

q = 1-p,

n : jumlah percobaan

x : jumlah sukses.

Jumlah sukses x	Probabilitas P(x)
0	$\frac{n!}{0!(n-0)!}p^0q^{(n-0)}$
1	$\frac{n!}{1!(n-1)!}p^1q^{(n-1)}$
2	$\frac{n!}{2!(n-2)!}p^2q^{(n-2)}$
3	$\frac{n!}{3!(n-3)!}p^3q^{(n-3)}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{n!}{n!(n-n)!}p^nq^{(n-n)}$
	1.00

Mean dari distribusi binomial :

$$\mu = E(X) = np$$

Variansi dari distribusi binomial :

$$\sigma^2 = V(X) = npq$$

Deviasi standar dari distribusi binomial :

$$\sigma = \mathrm{SD}(X) = \sqrt{npq}$$

CONTOH :

Probabilitas bahwa seseorang pasien penderita penyakit jantung akan sembuh adalah 0,4. Jika 10 orang diketahui terserang penyakit jantung, berapa probabilitas :

a) 3 orang yang sembuh

b) Paling banyak 3 orang yang sembuh

c) Paling sedikit 3 orang yang sembuh

PENYELESAIAN :

Diketahui : n=10, p=0,4 dan q=1 – p = 1 – 0,4 = 0,6

Jawab :

a) P(x=3) = $\binom{10}{3}.(0,4)^3.(0,6)^7$

b) Paling banyak 3 berarti : 0, 1, 2, 3.

P(x ≤ 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)

$$= \binom{10}{0}.(0,4)^0.\ (0,6)^{10} + \binom{10}{1}.(0,4)^1.\ (0,6)^9 + \binom{10}{2}.(0,4)^2.\ (0,6)^8 + \binom{10}{3}.(0,4)^3.\ (0,6)^7$$

$$= \ 0,382$$

c) Paling sedikit 3 berarti : 3, 4, 5, … , 10 = A

A^c = 0, 1, 2

P(A^c) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)

$$= \binom{10}{0}.(0,4)^0 . (0,6)^{10} + \binom{10}{1}.(0,4)^1.(0,6)^9 + \binom{10}{2}.(0,4)^2 . (0,6)^8$$

= 0,167

P(A) = 1 – P(A^c)

P(x≥3) = 1 – P(x≤2)

= 1 – 0,167

= 0,833

Rata-rata = mean x :

$\mu = n.p = 10.(0,4) = 4$

Variansi x :

$\sigma^2 = n.p.q = n.p.(1-q)$

$= 10.(0,4).(0,6) = 2,4$

Deviasi standar x :

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,4} = 1,55$

Latihan Soal 1

1. Berdasarkan suatu survey diketahui 2 dari 5 laki-laki dewasa punya peluang menderita Osteoporosis. Jika disuatu kantor ada 5 orang laki-laki, hitunglah probabilitas bahwa 5 orang tersebut :
   a. Tidak ada satupun yang menderita Osteoporosis
   b. Paling sedikit 3 orang menderita Osteoporosis
   c. Hanya 2 orang menderita Osteoporosis

Latihan Soal 2

2. Menurut pendapat seorang ahli mengatakan bahwa 4 dari 7 wanita berpotensi mengalami anemia. Dari 10 orang wanita, tentukan probabilitasnya
   a. Hanya satu orang wanita yang mengalami anemia
   b. Lebih dari 7 orang wanita mengalami anemia
   c. Paling sedikit 2 orang wanita mengalami anemia

Latihan Soal 3

3. Jika 15% barang yang diproduksi suatu mesin pabrik diketahui rusak, berapa probabilitasnya dari 4 barang yang diproduksi :
   a. Semua rusak
   b. Paling banyak 2 rusak
   c. Paling sedikit 3 rusak

Latihan Soal 4

* Berapa peluang untuk mendapatkan 6 sisi G ketika melakukan undian dengan sebuah mata uang sebanyak 10 kali

Latihan Soal 5

* Lakukan undian dengan dadu sebanyak 10 kali. Berapa peluang yang muncul mata dadu 6 sebanyak 8 kali.

Latihan Soal 6

* 10% dari suatu benda tergolong dalam kategori A. Sebuah sample berukuran 30 telah diambil secara acak. Berapa peluang sample itu akan berisi benda kategori A.
* a) Semuanya
* b) Sebuah
* c) Dua buah
* d) Paling sedikit sebuah
* e) Paling banyak 2 buah
* f) Tentukan rata-rata terdapatnya kategori A

DISTRIBUSI POISSON

Sifat percobaan Poisson

1. Peluang suatu kejadian adalah sama untuk 2 (dua) interval yang sama.
2. Kejadian pada suatu inverval saling bebas dengan kejadian pada inverval yang lain
3. Terjadinya kejadian sangat jarang terjadi

* Fungsi Peluang Poisson

$$p(x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$$

Dimana x =banyaknya kejadian pada interval waktu tertentu

λ =rata-rata banyaknya kejadian pada interval waktu tertentu

$$\lambda = n.p$$

e = 2.71828 (bilangan natural)

Nilai Harapan (*Expected Value*) atau Rata-rata

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = \lambda$$

Varian

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \lambda$$

Simpangan Baku (*Standard Deviation*)

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\lambda}$$

CONTOH 1 :

Di RS Mercy, 3 dari 100 pasien pasti mendatangi UGD per jamnya. Berapa peluang dari 100 pasien akan mendatangi UGD pada akhir minggu sebanyak :

a. 4 pasien saja
b. paling banyak 2 pasien
c. paling sedikit 2 pasien
d. Siapa pemilik rumas sakit mercy tersebut?

PENYELESAIAN :

Diketahui :

λ = p.n = 3/100 * 100

x = 4

$$p(4) = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = 0{,}1680$$

Jadi peluang ada 4 pasien mendatangi UGD pada akhir minggu adalah 0,1680

CONTOH 2 :

* Misal rata-rata ada 1,4 orang buta huruf setiap 100 orang. Diambil sebuah sampel berukuran 200 orang . Jika x = banyak buta huruf per 200 orang, Berapa peluang terdapat tidak ada buta huruf?

PENYELESAIAN :

Diketahui :

λ = p.n = 1.4/100 * 200 = 2.8

x = 0

Ditanya : P(X=0)

$$p(0) = \frac{2.8^0 e^{-2.8}}{0!} = 0,0608$$

Jawab :

Jadi peluang terdapat tidak ada yang buta huruf adalah 0,0608

Latihan Soal 1

1. Probabilitas bahwa seorang balita akan menderita reaksi buruk akibat imunisasi adalah 0,001. Hitunglah bahwa dari 2000 balita yang diimunisasi,
   a. Tidak ada satupun balita yang menderita reaksi buruk akibat imunisasi.
   b. Hanya 2 balita yang menderita reaksi buruk akibat imunisasi
   c. Lebih dari 3 balita yang menderita reaksi buruk akibat imunisasi

Latihan Soal 2

2. Diketahui bahwa rata-rata 1 dari 1500 mobil yang lewat jalan tol Krapyak mengalami kerusakan ban. Apabila pada hari tertentu lewat 4500 mobil di jalan tol Krapyak, berapa probabilitas bahwa :

   a. Hanya satu mobil yang mengalami kerusakan ban
   b. Kurang dari 2 mobil mengalami kerusakan ban
   c. Paling sedikit 3 mobil mengalami kerusakan ban

Latihan Soal 3

3. Seorang broker real estate mengatakan bahwa 2 dari 40 rumah yang ditawarkan akan terjual dalam setiap minggunya. Jika rumah yang tersedia 80 rumah, tentukan probabilitas bahwa dalam waktu satu minggu akan terjual :

   a. Hanya satu rumah

   b. Lebih dari 5 rumah

DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

- Distribusi peluang untuk variabel acak kontinu tidak dapat disajikan dalam bentuk tabel, tetapi dinyatakan dalam sebuah fungsi yang disebut *fungsi kepadatan probabilitas*

- Fungsi tersebut dinyatakan sedemikian sehingga luas daerah di bawah kurva, diatas sumbu x ≈ 1

$$\int_a^b f_{(x)}\,dx = 1$$

RATA-RATA HITUNG / HARGA HARAPAN / EKSPEKTASI, VARIANSI DAN STANDAR DEVIASI

- **Rata-rata Hitung/Harga harapan/ Ekspektasi**

$$\mu_x = E(x) = \sum x.f(x)$$

- **Varians**

$$\sigma^2 = E(x^2) - E(x)^2$$
$$= \sum(x^2.f(x)) - [\sum(x.f(x))]^2$$

- **Standar Deviasi**

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Contoh

1. Diketahui : distribusi probabilitas sbb :

x	1	2	3	4	5	Jml
f(x)	0,10	0,25	0,20	0,15	0,3	1

Hitung : a) Mean x

b) Variansi x

c) Deviasi standar x

Jawab :

x	1	2	3	4	5	Jml
f(x)	0,10	0,25	0,20	0,15	0,3	1
x.f(x)	0,10	0,50	0,60	0,60	1,50	3,30
x^2.f(x)	0,10	1,00	1,80	2,40	7,50	12,8

$=\Sigma x.f(x)$

$=\Sigma x^2.f(x)$

a) Mean x = E(x) = Σx.f(x) = 3,30

b) Var (x) $= E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 12{,}8 - (3{,}3)^2$

$= 12{,}8 - 10{,}89 = 1{,}91$

c) SD (x) $= \sqrt{var(x)} = 1{,}38$

2) Diketahui table distribusi probabilitas x

x = banyak computer yang terjual dalam 1 hari

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Hitung :

a) Banyak computer yang diharapkan terjual rata-rata dalam 1 hari = E(x)

b) Standar Deviasi x = SD(x)

Jawab :

x	0	1	2	3	4	5	Jml	
f(x)	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	1	
x.f(x)	0	0,1	0,4	0,9	0,8	0,5	2,7	$= E(x)$
$x^2.f(x)$	0	0,1	0,8	2,7	3,2	2,5	9,3	$= E(x^2)$

a) $E(x) = \Sigma\, x.f(x) = 2{,}7$

b) $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 9{,}3 - (2{,}7)^2$

$= 2{,}01$

$SD(x) = \sqrt{var(x)} = \sqrt{2{,}01} = 1{,}42$

DISTRIBUSI NORMAL

- Distribusi normal adalah sebuah distribusi yang paling luas penggunaannya.
- Karakterisik Distribusi Peluang Normal
  - Bentuk kurva normal seperti bel dan simetris.
  - Parameter σ, menunjukkan lebar dari kurva normal (semakin besar nilainya, semakin lebar).
  - Titik tertinggi dari kurva nomal terletak pada nilai rata-rata=median=modus.
  - Luas total area di bawah kurva normal adalah 1. (luas bagian di sebelah kiri μ = sebelah kanan μ).
  - Peluang suatu variabel acak normal sama dengan luas di bawah kurva normal.

Persamaan distribusi normal tergantung pada 2 parameter, yaitu μ dan σ. Persamaanya sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Dimana: μ = rata-rata (*mean*)

σ = simpangan baku (*standard deviation*)

π = 3.14159

e = 2.71828

Untuk mempermudah perhitungan itu, maka variabel x di transformasi menjadi angka baku z, dimana :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Latihan Soal 1

1. Suatu variable random mempunyai distribusi normal dengan mean = 80 dan simpangan baku = 4,8. Berapa probabilitasnya bahwa variable random akan mempunyai nilai :
   a. Kurang dari 87,2
   b. Lebih dari 76,4
   c. Antara 81,2 dan 86,0
   d. Antara 71,6 dan 88,4

Latihan Soal 2

2. Panjang ikan sardine yang diterima suatu pabrik pengalengan ikan mempunyai panjang rata-rata 4,54 inci dan simpangan baku 0,25 inci. Apabila distribusi panjang ikan sardine tersebut mendekati distribusi normal, berapa persentase dari ikan-ikan tersebut yang panjangnya adalah :
   a. Lebih dari 5 inci
   b. Kurang dari 4 inci
   c. 4,4 sampai 4,6 inci

Latihan Soal 3

3. Suatu mesin pengisi minuman ringan diatur sedemikian rupa sehingga rata-rata mengisi setiap botol 200 milimeter. Jika volume minuman tersebut berdistribusi normal dengan simpangan baku 15 milimeter, ditanyakan :

a. Berapa bagian yang berisi lebih dari 224 milimeter
b. Berapa probabilitas seluruh botol akan berisi 191 sampai 209 milimeter
c. Berapa banyak botol minuman yang berisi melebihi 230 milimeter bila produksi diketahui 1000 botol.
d. Di bawah nilai berapa untuk diperoleh 25 % isi terendah.

Latihan Soal 4

4. Pengemudi taksi berdasarkan pengalamannya mengetahui bahwa jumlah penumpang yang ia antarkan untuk sore hari rata-rata 23,7 orang dengan deviasi standar 4,2. Jika dianggap jumlah penumpang berdistribusi normal, hitunglah probabilitasnya bahwa waktu sore hari pengemudi taksi tersebut mengantarkan :

   a. 20 penumpang
   b. Paling sedikit 18 penumpang
   c. Paling banyak 25 penumpang
   d. 15 sampai 21 penumpang