NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

>> DEFINISI NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada $\mathbb{R}^n$ disebut *vektor eigen* (*vektor karakteristik*) dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; jelasnya:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ ini disebut *nilai eigen* (*nilai karakteristik*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen (vektor karakteristik) dari A yang terkait dengan λ.

Contoh:

Diberikan vektor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}$.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 3\boldsymbol{x}$$

Maka, vektor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ disebut vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}$ yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A berukuran $n \times n$, persamaan $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ dapat dituliskan kembali menjadi

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$$
$$A\boldsymbol{x} - \lambda I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan ini. Persamaan ini memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Persamaan di atas disebut sebagai *persamaan karakteristik* dari matriks A; skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen dari matriks A. Persamaan karakteristik di atas juga bisa dituliskan: $\det(\lambda I - A) = 0$

Apabila diperluas lagi, $\det(A - \lambda I)$ atau $\det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai *polinomial karakteristik* dari matriks A.

Contoh:

Tentukan nilai-nilai eigen dari

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\4 & -17 & 8\end{bmatrix}$$

Pertama, cari dahulu matriks $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\4 & -17 & 8\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\4 & -17 & 8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\0 & -\lambda & 1\\4 & -17 & 8-\lambda\end{bmatrix}$$

Selanjutnya, cari $\det(A-\lambda I)$.

$$\det(A-\lambda I)=(-\lambda)(-\lambda)(8-\lambda)+(1)(1)(4)+(0)(0)(-17)-(0)(-\lambda)(4)-(-\lambda)(1)(-17)-(1)(0)(8-\lambda)$$
$$=(8\lambda^2-\lambda^3)+4+0-0-17\lambda-0$$
$$=8\lambda^2-\lambda^3+4-17\lambda$$
$$=-\lambda^3+8\lambda^2-17\lambda+4$$

Dengan menggunakan persamaan karakteristik, diperoleh

$$\det(A-\lambda I)=0$$
$$-\lambda^3+8\lambda^2-17\lambda+4=0$$
$$\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-4=0$$
$$(\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+1)=0$$

Dengan menggunakan rumus kuadratik, maka solusi untuk $(\lambda^2-4\lambda+1)=0$ adalah $2+\sqrt{3}$ dan $2-\sqrt{3}$, sehingga didapatlah nilai-nilai eigen dari matriks A, yaitu:

$$\lambda = 4, \qquad \lambda = 2+\sqrt{3}, \qquad \lambda = 2-\sqrt{3}$$

TEOREMA 1
Jika A adalah sebuah matriks segitiga (atas/bawah) atau matriks diagonal, maka nilai-nilai eigen dari A adalah entri-entri yang terletak pada diagonal utama matriks A.

Contoh:
Tentukan nilai-nilai eigen dari matriks

$$B=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -2 & -\frac{7}{8} & 10 \\ 0 & \frac{2}{3} & 29 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 1, maka nilai-nilai eigen dari matriks B adalah

$$\lambda=\frac{3}{4}, \qquad \lambda=\frac{2}{3}. \qquad \lambda=-1, \qquad \lambda=-6$$

TEOREMA 2
Jika A adalah suatu matriks $n\times n$ dan λ adalah suatu bilangan riil, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen. (1) λ adalah suatu nilai eigen dari A. (2) Sistem persamaan $(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ memiliki solusi nontrivial. (3) Terdapat suatu vektor taknol x pada $\mathbb{R}^n$ sedemikian rupa sehingga $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. (4) λ adalah suatu solusi dari persamaan karakteristik $\det(A-\lambda I)=0$.

>> MENENTUKAN BASIS UNTUK RUANG EIGEN

Setelah mengetahui bagaimana cara mencari nilai eigen, selanjutnya adalah mempelajari bagaimana cara mencari vektor eigen. Vektor-vektor eigen matriks A yang terkait dengan suatu nilai eigen λ adalah vektor-vektor taknol $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi persamaan

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Dengan kata lain, vektor-vektor eigen yang terkait dengan λ adalah vektor-vektor di dalam ruang solusi $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Ruang solusi ini disebut sebagai *ruang eigen* dari matriks A yang terkati dengan λ.

Contoh:
Tentukanlah basis-basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah:

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

Atau

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Dengan menggunakan pemfaktoran, didapatlah:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

sehingga, nilai-nilai eigen dari A adalah:

$$\lambda = 1 \qquad \& \qquad \lambda = 2$$

Berdasarkan definisi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah suatu vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Hal ini berarti bahwa $\boldsymbol{x}$ dikatakan sebagai suatu vektor eigen dari matriks A jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ merupakan suatu solusi nontrivial dari persamaan $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer, didapatlah

$$x_1 + x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -x_3$$

Karena dari hasil yang didapat, tidak terdapat keterangan mengenai x_2, maka x_2 dapat dianggap sebagai suatu parameter; misalkan $x_2 = t$. Dan, misalkan pula $x_3 = s$, maka:

$$x_1 = -s, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = s$$

sehingga, vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \& \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bebas linier (mengapa?), vektor-vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 2$.

Jika $\lambda = 1$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer, didapatlah

$$\begin{array}{ccc} x_1 + 2x_3 = 0 & \rightarrow & x_1 = -2x_3 \\ x_2 - x_3 = 0 & \rightarrow & x_2 = x_3 \end{array}$$

Misalkan $x_3 = s$, maka

$$x_1 = -2s, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = s$$

sehingga, vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bebas linier (mengapa?), vektor di atas membentuk suatu basis yang terkait dengan $\lambda = 1$.

Untuk menentukan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen (λ), harus ditentukan terlebih dahulu basis-basis untuk ruang eigennya.

Perhatikan kembali contoh di atas. Untuk vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan $s = 1$ dan $t = 1$, maka didapatlah vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah:

$$\boldsymbol{x} = 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sementara, untuk vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $s = -2$, maka didapatlah vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah:

$$\boldsymbol{x} = -2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 3

Jika k adalah bilangan bulat positif, λ adalah nilai eigen dari suatu matriks A, dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor eigen yang terkait dengan λ, maka λ^k adalah nilai eigen dari A^k dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor eigen yang terkait dengannya.

Contoh:
Pada contoh sebelumnya telah ditunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 1$, sehingga berdasarkan Teorema 3, nilai-nilai eigen dari matriks A^7 adalah:

$$\lambda = 2^7 = 128 \qquad \& \qquad \lambda = 1^7 = 1$$

Selain itu, telah ditunjukkan juga bahwa vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka, berdasarkan Teorema 3, vektor-vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan $\lambda = 2$ akan sama dengan vektor-vektor eigen dari matriks A^7 yang terkait dengan $\lambda = 2^7 = 128$. Begitu pula untuk $\lambda = 1^7 = 1$. Telah ditunjukkan bahwa vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka, berdasarkan Teorema 3, vektor-vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan $\lambda = 1$ akan sama dengan vektor-vektor eigen dari matriks A^7 yang terkait dengan $\lambda = 1^7 = 1$.

Soal A:

1. Tentukan nilai-nilai eigen dari S^9 jika diketahui

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

2. Tentukan nilai eigen dan basis untuk ruang eigen T^{50} jika diketahui

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

\>> DIAGONALISASI

Sebuah matriks persegi A dikatakan *dapat didiagonalisasi* jika terdapat suatu matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah suatu matriks diagonal.
Matriks P dikatakan *mendiagonalisasi* matriks A.

Berikut ini adalah prosedur untuk mendiagonalisasi suatu matriks.

1) Tentukan n vektor eigen dari A yang bebas linier; misalkan $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n$.
2) Bentuklah suatu matriks P dengan $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
3) Matriks $P^{-1}AP$ kemudian akan menjadi diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya secara berurutan, dengan λ_i adalah nilai-nilai eigen yang terkait dengan $\boldsymbol{p}_i$ untuk $i = 1,2, \dots, n$.

Contoh:
Tentukan suatu matriks P yang mendiagonalisasi matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari contoh sebelumnya, telah didapat nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 1$, serta basis-basis berikut untuk ruang eigen

$$\lambda = 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \& \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terdapat tiga vektor basis secara keseluruhan sehingga matriks A dapat didiagonalisasi dan

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mendiagonalisasi A. Untuk memastikan kebenarannya, carilah $P^{-1}AP$.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tidak terdapat urutan yang khusus untuk kolom-kolom matriks P. Karena entri ke-*i* matriks $P^{-1}AP$ adalah suatu nilai eigen untuk vektor kolom ke-*i* matriks P, maka jika urutan dari kolom-kolom matriks P diubah, hal ini hanya akan mengubah urutan dari nilai-nilai eigen pada diagonal matriks $P^{-1}AP$. Jadi, sebagai contoh, dengan menuliskan matriks P untuk contoh yang di atas

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 4

Jika suatu matriks $A_{n\times n}$ memiliki n nilai eigen yang berbeda, maka A dapat didiagonalisasi.

>> MENGHITUNG PANGKAT SUATU MATRIKS

Jika diketahui matriks persegi A dapat didiagonalisasi oleh matriks P sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP = D$, maka:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Contoh:
Tentukan A^{13} jika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pada contoh sebelumnya, matriks A di atas dapat didiagonalisasi oleh

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

Maka,

$$\begin{aligned} A^{13} = PD^{13}P^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{13} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<u>Soal B</u>:

Diberikan matriks A sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks A^{1000}.