PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Pendahuluan

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Orde dari PD parsial : tingkat tertinggi dari derivatif yang ada dalam PD. Derajat dari PD parsial : pangkat tertinggi dari turunan tingkat tertinggi yang ada dalam PD.

PD parsial dikatakan **linier** jika hanya memuat derajad pertama dari variabel - variabel bebasnya dan derivatif - derivatif parsialnya. Beberapa contoh PD parsial yang penting :

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ persamaan gelombang satu dimensi
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ persamaan konduksi panas satu dimensi
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ persamaan laplace dua dimensi
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ persamaan poisson dua dimensi
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ persamaan laplace tiga dimensi

CONTOH-CONTOH PD PARSIAL DALAM BENTUK PRAKTIS:

1. Persamaan Gelombang : $\frac{\partial^2 U}{dt^2} = C^2 \frac{\partial^2 U}{dx^2}$

2. Persamaan Gelombang Radio : $-\frac{\partial V}{dx} = L \frac{\partial U}{dt}$

$$-\frac{\partial I}{dx} = C \frac{\partial V}{dt}$$

3. Persamaan Panas (heat flow)

   untuk dimensi satu : $\frac{\partial U}{dt} = C^2 \frac{\partial^2 U}{dx^2}$

4. Persamaan Panas (heat flow)

   untuk dimensi dua : $\frac{\partial^2 U}{dx^2} + \frac{\partial^2 U}{dy^2} = 0$

Pembentukan PD Parsial

Membentuk persamaan differensial parsial dapat dilakukan dengan :

A. Eliminasi konstanta
B. Eliminasi fungsi.

A. Eliminasi konstanta

Contoh :

Bentuklah PD parsial dari : $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = a^2$

Jawab:

$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = a^2$ (Ada 2 konstanta yaitu a dan c)

Turunkan persamaan tehadap x: $2x + 2(z - c) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$x + (z - c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; (1)$$

Turunkan persamaan tehadap y : $2y + 2(z - c) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$y + (z - c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \;\ldots\ldots\ldots(2)$$

Eliminasi c dengan cara: $\left[(1) \times \frac{\partial z}{\partial y} - (2) \times \frac{\partial z}{\partial x}\right]$ sehingga:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

B. Eliminasi fungsi

Contoh: Bentuklah PD Parsial dari: $z = f(x^2 - y^2)$

Jawab : $p = \frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 - y^2)(2x)$ ………………….. (1)

$q = \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2 - y^2)(-2y)$ ………………….. (2)

dari (1) dan (2) didapat :

$$\frac{p}{q} = \frac{2x}{-2y} \quad \leftrightarrow \; 2xq + 2yp = 0$$

sehingga:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

PD Parsial Linier Orde 2

Persamaan umum :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5\text{-}1)$$

u = variabel tak bebas, merupakan fungsi dari x dan y

x, y = variabel bebas dari PD

A, B, C, D, E, F, G = koefisien, bisa konstan atau merupakan fungsi dari x atau y tetapi bukan fungsi dari u.

Jika: $G = 0$ disebut PD homogen

$G \neq 0$ disebut PD non homogen

Jika: $B^2 - 4ac < 0$ disebut PD Eliptik

$B^2 - 4ac = 0$ disebut PD Parabolis

$B^2 - 4ac > 0$ disebut PD Hiperbolis

Metode Penyelesaian PD Parsial

Beberapa Penyelesaian PD parsial yang akan dibahas adalah:

A. Integral Langsung

B. Pemisalan $u = e^{ax+by}$

C. Pemisahan Variabel

Integral Langsung

Mencari penyelesaian umum dengan metoda yang digunakan dalam PD biasa (dengan mengintegralkan masing - masing ruas ke setiap variabel bebasnya).

Contoh :

a. Selesaikan PD : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$

b. Tentukan masalah nilai batas yang memenuhi $z(x, 0) = x^2$; $z(1, y) = \cos y$

PENYELESAIAN :

a. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] = x^2 y$$ → Diintegralkan terhadap x

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 y + F(y)$$ → Diintegralkan terhadap y

$$z = \frac{1}{3}x^3 y^2 + \int F(y)\,dy + G(x)$$

PUPD : ; $z = \frac{1}{6}x^3 y^2 + H(y) + G(x)$ G(x) dan H(y) fungsi sembarang

b. $$z(x,0) = x^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{6}x^3 0^2 + H(0) + G(x)$$

$$G(x) = x^2 - H(0)$$

$$z(1,y)=\cos y \rightarrow \cos y=\frac{1}{6}1^3y^2+H(y)+1^2-H(0)$$

$$z(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+H(y)+x^2-H(0)$$

$$\cos y=\frac{1}{6}y^2+H(y)+1^2-H(0)$$

$$H(y)=\cos y-6\frac{1}{6}y^2-1+H(0)$$

$$z(x,y)=\frac{1}{6}x^3y2+\cos y-\frac{1}{6}y^2-1+H(0)+x^2-H(0)$$

PKPD : $z(x,y)=\frac{1}{6}x^3y2+\cos y-\frac{1}{6}y^2-1+x^2$

2.Selesaikan PD : $t\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x}=x^2$; $u(x,1)=\frac{x^3}{6}; u(0,t)=0$

$\frac{\partial}{\partial x}\left[t\frac{\partial u}{\partial t}+2u\right]=x^2$ $\longrightarrow$ diintegralkan ke x

$t\frac{\partial u}{\partial t}+2u=\frac{1}{3}x^3+F(t)$ $\longrightarrow$ dikalikan t

$$t^2\frac{\partial u}{\partial t}+2tu=\frac{1}{3}x^3t+tF(t)$$

$\frac{\partial}{\partial t}(t^2u)=\frac{1}{3}x^3t+tF(t)$ $\longrightarrow$ diintegralkan ke t

$$t^2u=\frac{1}{6}x^3t^2+\int tF(t)dt+H(x)$$

$$t^2u=\frac{1}{6}x^3t^2+G(t)+H(x)$$

PUPD: $u(x,t)=\frac{\left[\frac{1}{6}x^3t^2+G(t)+H(x)\right]}{t^2}$

Syarat batas 1 : $u(x,1)=\frac{x^3}{6}$

$$u(x,1)=\frac{\left[\frac{1}{6}x^3+G(1)+H(x)\right]}{1}=\frac{1}{6}x^3$$

$$\frac{1}{6}x^3 + G(1) + H(x) = \frac{1}{6}x^3 \rightarrow G(1) + H(x) = 0 \rightarrow H(x) = -G(1)$$

Penyelesaian : $u(x,t) = \dfrac{\left[\frac{1}{6}x^3t^2 + G(t) - G(1)\right]}{t^2}$

Syarat batas 2 : $u(0,t) = 0$

$$u(0,t) = \frac{0 + G(t) - G(1)}{t^2} = 0$$

$$G(t) - G(1) = 0$$
$$G(t) = G(1)$$

$$u(x,t) = \frac{\frac{1}{6}x^3t^2 + G(1) - G(1)}{t^2}$$

PKPD : $u(x,t) = \frac{1}{6}x^3$

Pemisalan u = e^ax+by

PD parsial linear orde 2 dengan A,B,C,D,E,F konstan, PU PD ditentukan dengan memisalkan **$u = e^{ax+by}$** ; a,b konstanta yang harus dicari.

Contoh:

1. Selesaikan PD : $3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u(x,0) = 4e^{-x}$

   Penyelesaian :

   misalkan : $u(x,y) = e^{ax+by}$

   $\frac{\partial u}{\partial x} + ae^{ax+by}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = be^{ax+by}$

   PD menjadi :

   $3ae^{ax+by} + 2be^{ax+by} = 0$

   $(3a + 2b)e^{ax+by} = 0 \longrightarrow 3a + 2b = 0 \rightarrow b = -\frac{3}{2}a$

   PU PD : $u(x,y) = e^{ax - \frac{3}{2}ay} = e^{a\left(x - \frac{3}{2}y\right)} = F\left(x - \frac{3}{2}y\right)$

   syarat batas : $u(x,0) = 4e^{-x}$

   $u(x,0) = F(x) = 4e^{-x}$

2. PD : $\frac{\partial v}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, dengan syarat batas : $v(0, y) = 4\sin y$

misalkan $v(x, y) = e^{ax=by}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = ae^{ax+by}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = be^{ax+by}$

PD menjadi :

penyelesaian PD : $u(x, y) = 4e^{-\left(x - \frac{3}{2}y\right)} = 4e^{(3y-2x)/2}$

$(a + 3b)e^{ax+by} = 0 \longrightarrow a + 3b = 0 \rightarrow a = -3b$

PU PD :

$v(x, y) = e^{-3bx+by} = e^{b(-3x+y)} = F(-3x + y)$

syarat batas: $v(0, y) = 4\sin y$

$v(0, y) = F(y) = 4\sin y$

penyelesaian PD : $v(x, y) = 4\sin(-3x + y)$

3. Selesaikan PD : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $u(0, y) = y$; $u_x(0, y) = 0$

Penyelesaian :

misalkan : $u = e^{ax+by}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax+by}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+by}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = be^{ax+by}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 e^{ax+by}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = abe^{ax+by} = \frac{\partial^{2u}}{\partial y \partial x}$

PD menjadi:

$(a^2 + 3ab + 2b^2)e^{ax+by} = 0$

$a^2 + 2ab + 2b^2 = 0$

$(a+b)(a+2b)=0 \rightarrow a=-b$ atau $a = -2b$

untuk $a = -b \rightarrow u_1 = e^{-bx+by} = e^{b(-x+y)} \rightarrow u_1 = F(-x+y)$

Untuk $a = -2b \rightarrow u_2 = e^{-2bx+by} = e^{b(-2x+y)} \rightarrow u_2 = G(-2x+y)$

PU PD : $u(x,y) = u_1 + u_2$
$u(x,y) = F(-x+y) + G(-2x+y)$

$$u(0,y) = y$$

Syarat batas1 : $u(0,y) = f(y) + G(y) = y$
$\rightarrow G(y) = -F(y) + y$

Penyelesaian PD : $u(x,y) = F(-x+y) - \dfrac{\left| F(-2x+y) - 2x + y \right|}{G(-2x+y)}$

Syarat batas 2 : $u_x(0,y) = 0$

Misalkan ; $-x+y = v$ dan $-2x+y+w$

$$u = F(v) - F(w) + w$$

$$u_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{dF}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{dF}{dw}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$= \frac{dF}{dv}(-1) - \frac{dF}{dw}(-2) - 2 = -\frac{dF}{dv} + 2\frac{dF}{dw} - 2$$

$$= -F'(v) + 2F'(w) - 2$$

$$= -F'(-x+y) + 2F'(-2x+y) - 2$$

$$u_x(0,y) = -F'(y) + 2F'(y) - 2 = 0$$

$$\rightarrow F'(y) = 2$$

$$\rightarrow F(y) = 2y + c$$

$$u(x,y) = f(-x+y) - F(-2x+y) - 2x + y$$

$$u(x,y) = 2(-x+y) + c - [2(-2x+y) + c] - 2x + y$$

$$u(x,y) = -2x + 2y + c + 4x - 2y - c - 2x + y$$

$$u(x,y) = y$$

Pemisahan Variabel: $u = x.y\ dengan\ x = x(x), y = y(y), \frac{\partial u}{\partial x} = x'y, \frac{\partial u}{\partial y} = xy'$

B. Metode Pemisahan Variabel U = X Y, X = X(x), Y = Y(y)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X^1 Y \ ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = X\ Y^1$$

Contoh:

1. Selesaikan PD Parsial $\frac{\partial U}{\partial x} = 4 \frac{\partial U}{\partial y}$, $U(0,y) = 8\ e^{-3y}$

Jawab :

Misal $U = X Y \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = X^1 Y \ ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = X\ Y^1$

Jadi PDP menjadi $X^1 Y = 4\ X\ Y^1$ atau

$$\frac{X^1}{X} = 4 \frac{Y^1}{Y} = k \quad (\text{ konstanta })$$

$$\frac{X^1}{X} = k \quad \text{dan} \quad 4 \frac{Y^1}{Y} = k$$

$X = C_1\ e^{kX}$ dan $Y = C_2\ e^{\frac{k}{4}Y}$, sehingga:

$U(x,y) = U = X Y = C_1\ e^{kX} . C_2\ e^{\frac{k}{4}Y} = C\ e^{kx + \frac{k}{4}y}$, $C = C_1C_2$

Karena $U(0,y) = 8\ e^{-3y} = C\ e^{0 + \frac{k}{4}y} = C\ e^{\frac{k}{4}Y}$, maka

Dari identitas diperoleh : C = 8, k/4 = -3 → k = -12

Jadi Penyelesaian PDP adalah $U(x,y) = 8\ e^{-12x - 3y}$ //

2. Selesaikan PD Parsial $\frac{\partial U}{\partial x} + U = \frac{\partial U}{\partial t}$, $U(x,0) = 4\,e^{-3x}$

Jawab :

Misal $U = X\,T \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = X^1\,T$; $\frac{\partial U}{\partial t} = X\,T^1$

Jadi PDP menjadi $X^1\,T + XT = X\,T^1$ atau

$$\frac{X^1}{X} + 1 = \frac{T^1}{T} = k \quad (\text{ konstanta })$$

$$\frac{X^1}{X} + 1 = k \quad \text{dan} \quad \frac{T^1}{T} = k$$

$X = C_1\,e^{(k-1)X}$ dan $Y = C_2\,e^{kT}$, sehingga:

$U(x,t) = U = X\,T = C_1\,e^{(k-1)X} \,.\, C_2\,e^{kT} = C\,e^{(k-1)X+kT}$, $C = C_1C_2$

Karena $U(x,0) = 4\,e^{-3x} = C\,e^{(k-1)X+0} = C\,e^{(k-1)X}$, maka

Dari identitas diperoleh : $C = 4$, $k - 1 = -3 \rightarrow k = -2$

Jadi Penyelesaian PDP adalah $U(x,y) = 4\,e^{-3x-2t}$ //

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Selesaikan PD Parsial $4\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 3\,u$, $u(0,x) = 3\,e^{-x} - e^{-5x}$

2. Selesaikan PD Parsial $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

3. Selesaikan PD Parsial $\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} += u$; syarat : $u(x,0) = 3\,e^{-5x} + 2\,e^{-3x}$

4. Selesaikan PD Parsial $4\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 3u$, $u(0,y) = e^{-5y}$