

# BAB 5

## SIMULASI MODEL SISTEM ANTRIAN MENGUNAKAN BILANGAN RANDOM

Terdapat 2 (dua) komponen penting dalam model antrian sebagai komponen input yaitu tingkat kedatangan ( $\lambda$ ) dan tingkat pelayanan ( $\mu$ ). Kedua variable tersebut merupakan data penggerak simulasi. Perilaku simulasi dan semua hasil atau kesimpulan atas kinerja sistem antrian sangat tergantung pada data input yang sesuai. Tingkat kedatangan dan tingkat pelayanan dalam suatu model antrian dapat bersifat konstan (deterministic) atau acak (random). Walaupun data untuk tingkat kedatangan dan tingkat pelayanan dapat diperoleh melalui observasi, namun menentukan nilai yang pasti terhadap kedua variable tersebut bukanlah sesuatu yang mudah.

Dalam berbagai simulasi model antrian, kedua variable biasanya diasumsikan bersifat random dan mengikuti pola distribusi probabilitas tertentu. Untuk menentukan nilai tingkat kedatangan dan tingkat pelayanan dapat ditentukan dengan mensimulasikan data-data hasil observasi menggunakan nilai-nilai probabilitas terjadinya event. Sedangkan nilai random dalam simulasi dapat diperoleh dengan menggunakan table random number, electronic random number dan congruential pseudo random number generator. Dalam bab ini, pembahasan simulasi hanya menggunakan table angka random.

## **4.1 Tabel Angka Random**

Tabel angka random adalah tabel yang berisikan susunan angka random dengan jumlah digit tertentu maupun dalam format desimal. Selain dapat dijumpai pada buku-buku statistika, tabel angka random juga dapat dibangkitkan dengan program komputer (Microsoft Excel, Pascal, C++ dan sebagainya) menggunakan fungsi pembangkit bilangan random yang terdapat pada masing-masing program.

Karena terdapat berbagai cara dalam membangkitkan bilangan random, maka akan terdapat berbagai versi table bilangan random dalam praktek dan tidak terdapat ketentuan khusus untuk menggunakan versi yang mana. Selain itu juga

tidak terdapat aturan khusus tentang bagaimana menggunakan sebuah table bilangan random, akan tetapi biasanya pengguna table bilangan random menggunakan cara-cara yang sistematis.

Pada Tabel 4.1 di bawah ini diberikan contoh tabel angka random dengan format 5 digit yang dibangkitkan menggunakan fungsi RAND() pada Microsoft Excel (dapat juga menggunakan fungsi RANDBETWEEN bila menginginkan angka random pada interval nilai tertentu).

Tabel 4.1 : 5 Digit 200 Angka Acak

Line	Kolom									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	32957	60473	71554	85556	27376	79727	82421	91778	09784	35005
2	81424	50937	01805	08887	42407	19317	71509	16551	74433	42699
3	03878	11901	59667	56484	72226	57056	29552	59047	59415	21529
4	79578	61496	8445	64961	97143	40777	43663	01285	28113	82059
5	18784	29925	41025	65575	92754	01412	59146	94963	33872	93230
6	22347	46522	87244	44839	63672	87439	96595	33344	11452	30647
7	90114	33863	19072	70603	00157	44922	75157	73460	44935	12832
8	46385	42085	27881	22900	17941	11821	37378	43846	56653	01826
9	57124	66758	54357	63693	10970	12991	71163	52077	50878	38288
10	83599	32956	57286	99362	31410	04420	48343	90085	96468	01626
11	75091	85312	10209	47488	24816	44914	75615	92165	62354	84333
12	94590	8886	99469	91556	64888	08598	60236	15430	51986	97569
13	32195	20874	88168	91514	35614	50851	81512	21521	04671	89042
14	02494	62843	43309	01651	53159	11896	32256	07087	61721	66056
15	90691	33669	43194	52776	67582	03140	66406	65944	88895	08896
16	28850	52021	59661	94189	56244	12405	80469	89161	12746	46124
17	96178	85945	84509	03254	66793	43920	36047	91641	99116	41154
18	16166	42286	95511	54879	27994	95917	08876	56530	59833	04748
19	95696	04833	64594	36222	26943	94247	38140	12230	49860	34266
20	21229	12687	01068	96994	66090	13312	12319	09855	12861	82984

Dibangkitkan dari fungsi INT(RAND()\*10000) dengan Microsoft Excel

Sebagai contoh penggunaan bilangan random, suatu penelitian akan memilih 15 mahasiswa sebagai sampel dari 95 mahasiswa di suatu kelas (populasi). Pemilihan sampel akan dilakukan secara acak menggunakan table bilangan random, dengan cara sebagai berikut :

- Terdapat populasi sebanyak 95 mahasiswa. Beri nomor untuk masing-masing mahasiswa dengan format 2 digit, mulai dari 00, 01, 02, 03, ... , 94.
- Gunakan table bilangan random untuk memilih nomor-nomor sample dengan kriteria : “Ambil angka random 2 digit dari table bilangan random secara berturutan dari kiri ke kanan”. Nomor yang cocok dipilih sebagai sample dan apabila muncul nomor yang berulang maka diabaikan (sebab akan diambil sample 15 mahasiswa yang secara otomatis berbeda, bukan orang yang sama). Lakukan hingga didapat sebanyak 15 nomor random sebagai sample dan bila belum mencukupi dalam satu baris dapat dilanjutkan pada baris berikutnya.

**TABEL : 5 DIGIT 200 ANGKA ACAK**

Line	Kolom									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	32957	60473	71554	85556	27376	79727	82421	91778	09784	35005

Dari line 1 didapat angka random : 32, 95, 76, 04, 73, 71, 55, 48, ~~55~~, 56, 27, 37, 67, 97, ~~27~~, 82, 42 (15 bilangan random). Mahasiswa yang memiliki nomor-nomor tersebut yang terpilih sebagai sampel. Dapat juga criteria pengambilan bilangan randomnya diubah misalnya 2 digit awal bilangan random dari kiri ke kanan, maka akan didapat 15 bilangan random yaitu : 32, 60, 71, 85, 27, 79, 82, 91, 09, 35, 81, 50, 01, 08, 42.

## 4.2 Mensimulasikan Kedatangan dan Pelayanan

Hasil observasi terhadap pola kedatangan dan pelayanan biasanya tidak secara langsung dapat menentukan nilai waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan. Pola kedatangan dan pelayanan yang bersifat random dapat disimulasikan menggunakan table bilangan random dengan memanfaatkan nilai-nilai probabilitas terjadinya kedatangan dan pelayanan. Langkah-langkah untuk menentukan nilai rata-rata waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan adalah sebagai berikut :

- Tentukan nilai probabilitas untuk masing-masing waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan.
- Tentukan nilai probabilitas kumulatif untuk masing-masing waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan.
- Buatlah range atau interval bilangan random berdasarkan probabilitas kumulatif.
- Pilih bilangan random dari table bilangan random, cocokkan dengan kelas interval pada probabilitas kumulatif, kemudian ambil nilai waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan yang sesuai.
- Ulangi untuk sejumlah N individu yang disimulasikan.

### Contoh

Sebuah minimarket hanya mempunyai satu loket kasir. Waktu antar kedatangan pelanggan diasumsikan berdistribusi Poisson dengan rata-rata berkisar antara 0.5 sampai 5 menit, sedangkan waktu pelayanan diasumsikan berdistribusi Eksponensial dengan rata-rata berkisar antara 0.5 sampai 3 menit. Disiplin antrian yang diterapkan adalah pelanggan yang datang pertama di loket kasir akan dilayani pertama. Akan diadakan penelitian untuk menentukan kinerja sistem pelayanan pelanggan pada minimarket tersebut. Dari hasil observasi terhadap 20 sampel kedatangan pelanggan, diperoleh hasil sebagai berikut :

## Studi Kasus : Sistem Antrian Menggunakan Tabel Angka Random

88

Waktu Antar Kedatangan (menit)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Frekwensi	1	1	2	2	3	1	2	3	2	3

Sedangkan hasil observasi waktu pelayanan pelanggan terhadap 20 pelanggan diperoleh hasil sebagai berikut :

Waktu Pelayanan (menit)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Frekwensi	1	4	2	3	4	6

- Simulasikan waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan terhadap 20 orang pelanggan tersebut menggunakan table bilangan random. Gunakan 2 digit akhir dari deretan bilangan random pada table bilangan random.
- Berdasarkan hasil simulasi tersebut, tentukan :
  - Tingkat kesibukan kasir.
  - Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian.
  - Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem.
  - Rata-rata waktu yang dibutuhkan pelanggan dalam antrian.
  - Rata-rata waktu yang dibutuhkan pelanggan dalam sistem.
  - Peluang bahwa dalam sistem tidak ada pelanggan.
  - Peluang bahwa dalam sistem terdapat lebih dari 5 orang pelanggan.
  - Peluang bahwa pelanggan harus mengantri di loket kasir.
- Lakukan analisis kinerja sistem dengan menggunakan item pertanyaan b, apabila kasir ditambah menjadi 2 orang.

**Jawab**

- a. Simulasi Waktu Antar Kedatangan ( $1/\lambda$ ) dan Waktu Pelayanan ( $1/\mu$ )

$1/\lambda$	F	P	P Kum	Range		$1/\mu$	F	P	P Kum	Range
0.5	1	0.05	0.05	00 - 04		0.5	1	0.05	0.05	00 - 04
1.0	1	0.05	0.10	04 - 09		1.0	4	0.20	0.25	05 - 24
1.5	2	0.10	0.20	10 - 19		1.5	2	0.10	0.35	25 - 34
2.0	2	0.10	0.30	20 - 29		2.0	3	0.15	0.50	35 - 49
2.5	3	0.15	0.45	30 - 44		2.5	4	0.20	0.70	50 - 69
3.0	1	0.05	0.50	45 - 49		3.0	6	0.30	1.00	70 - 99
3.5	2	0.10	0.60	50 - 59			20			
4.0	3	0.15	0.75	60 - 74						
4.5	2	0.10	0.85	75 - 84						
5.0	3	0.15	1.00	85 - 99						
	20									

Simulasi untuk 20 pelanggan (random) :

Angka Acak	$1/\lambda$	$1/\mu$
57	3.5	2.5
73	4.0	3.0
54	3.5	2.5
56	3.5	2.5
76	4.5	3.0
27	2.0	1.5
21	2.0	1.0
78	4.5	3.0
84	4.5	3.0
05	1.0	1.0
24	2.0	1.0
37	2.5	2.0
87	5.0	3.0
07	1.0	1.0
17	1.5	1.0
09	1.0	1.0
51	3.5	2.5
33	2.5	1.5
99	5.0	3.0
78	4.5	3.0
Jumlah	61.5	42
Rata-rata	3.075	2.1

Dari hasil simulasi tersebut, maka diperoleh hasil :

- Waktu Antar Kedatangan :  
 $1/\lambda = 3.075$  menit/orang  
Tingkat Kedatangan :  
 $\lambda = 0.325$  orang/menit atau  
 $= 19.5122$  orang/jam
- Waktu Pelayanan :  
 $1/\mu = 2.1$  menit/orang  
Tingkat Pelayanan :  
 $\mu = 0.476$  orang/menit atau  
 $= 28.5714$  orang/jam

b. Model M/M/1/I/I :

1. Tingkat kesibukan kasir.

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{19.5122}{28.5714} = 0.6829 \text{ (68.29\%)}$$

2. Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian.

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{19.5122^2}{28.5714(28.5714 - 19.5122)} \\ = 1.4709 \text{ pelanggan}$$

3. Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem.

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{19.5122}{28.5714 - 19.5122} = 2.1539 \text{ pelanggan}$$

4. Rata-rata waktu yang dibutuhkan pelanggan dalam antrian.



$$\begin{aligned}
 W_q &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{19.5122}{28.5714(28.5174 - 19.5122)} \\
 &= 0.0754 \text{ jam} \\
 &= 4.523 \text{ menit}
 \end{aligned}$$

5. Rata-rata waktu yang dibutuhkan pelanggan dalam sistem.

$$\begin{aligned}
 W_s &= \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{28.5714 - 19.5122} = 0.1104 \text{ jam} \\
 &= 6.624 \text{ menit}
 \end{aligned}$$

6. Peluang bahwa dalam sistem tidak ada pelanggan.

$$P_0 = (1 - P)P^0 = (1 - 0.6829) = 0.3171 \text{ (31.71\%)}$$

7. Peluang bahwa dalam sistem terdapat lebih dari 5 orang pelanggan.

$$\begin{aligned}
 P(n > 5) &= 1 - P(n \leq 5) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) \\
 P_0 &= (1 - 0.6829)(0.6829)^0 = 0.3171 ; P_3 = (1 - 0.6829)(0.6829)^3 = 0.1010 \\
 P_1 &= (1 - 0.6829)(0.6829)^1 = 0.2165 ; P_4 = (1 - 0.6829)(0.6829)^4 = 0.0690 \\
 P_2 &= (1 - 0.6829)(0.6829)^2 = 0.1479 ; P_5 = (1 - 0.6829)(0.6829)^5 = 0.0471 \\
 P(n > 5) &= 1 - (0.3171 + 0.2165 + 0.1479 + 0.1010 + 0.0690 + 0.0471) \\
 &= 1 - 0.8986 = 0.1014 \text{ (10.14\%)}
 \end{aligned}$$

8. Peluang bahwa pelanggan harus mengantri di loket kasir.  
 = Peluang fasilitas pelayanan sedang sibuk =  $P = 0.6829$   
 = 68.29%

c. Model M/M/S=2/I/I :

1. Tingkat kesibukan kasir.

$$P = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{19.5122}{2(28.5714)} = 0.3415 \text{ (34.15\%)}$$

Untuk soal 2 – 8, terlebih dahulu dihitung  $P_0$

$$\lambda / \mu = 19.5122 / 28.5714 = 0.6829$$

$$\lambda / S\mu = 19.5122 / (2 * 28.5714) = 0.3415$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^S}{S!} \frac{1}{1 - (\lambda / S\mu)}} \\ &= \frac{1}{\frac{0.6829^0}{0!} + \frac{0.6829^1}{1!} + \frac{0.6829^2}{2!} \frac{1}{1 - 0.3415}} \\ &= \frac{1}{1 + 0.6829 + 0.3541} = \frac{1}{2.0370} = 0.4909 \end{aligned}$$

2. Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian.

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{(\lambda\mu)(\lambda / \mu)^S}{(S - 1)!(S\mu - \lambda)^2} P_0 \\ &= \frac{(19.5122)(28.5714)(0.6829)^2}{1!(57.1429 - 19.5122)^2} (0.4909) \\ &= 0.0901 \text{ pelanggan} \end{aligned}$$

3. Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem.

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.0901 + 0.6829 = 0.7730 \text{ pelanggan}$$

4. Rata-rata waktu yang dibutuhkan pelanggan dalam antrian.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.0901}{19.5122} = 0.0046 \text{ jam} = 0.276 \text{ menit}$$

5. Rata-rata waktu yang dibutuhkan pelanggan dalam sistem.

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{0.7730}{19.5122} = 0.03962 \text{ jam} = 2.3772 \text{ menit}$$

6. Peluang bahwa dalam sistem tidak ada pelanggan.

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - (\lambda/S\mu)}} \\ &= \frac{1}{\frac{0.6829^0}{0!} + \frac{0.6829^1}{1!} + \frac{0.6829^2}{2!} \frac{1}{1 - 0.3415}} \\ &= \frac{1}{1 + 0.6829 + 0.3541} = \frac{1}{2.0370} = 0.4909 \end{aligned}$$

7. Peluang bahwa dalam sistem terdapat lebih dari 5 orang pelanggan.

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} P_0, & \text{jika } 0 \leq n \leq S \\ \frac{(\lambda / \mu)^n}{S! S^{n-S}} P_0, & \text{jika } n \geq S \end{cases}$$

$$S = 2;$$

$$P(n > 5) = 1 - P(n \leq 5) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)$$

$$n = 0 \rightarrow P_0 = 0.4909 ;$$

$$n = 1 \rightarrow P_1 = \frac{(\lambda / \mu)^1}{1!} P_0 = \frac{0.6829^1}{1} 0.4909 = 0.3352 ;$$

$$n = 2 \rightarrow P_2 = \frac{(\lambda / \mu)^2}{2!} P_0 = \frac{0.6829^2}{2} 0.4909 = 0.1145 ;$$

$$n = 3 \rightarrow P_3 = \frac{(\lambda / \mu)^3}{2! 2^{3-2}} P_0 = \frac{0.6829^3}{2 * 2} 0.4909 = 0.0391 ;$$

$$n = 4 \rightarrow P_4 = \frac{(\lambda / \mu)^4}{2! 2^{4-2}} P_0 = \frac{0.6829^4}{2 * 4} 0.4909 = 0.0133 ;$$

$$n = 5 \rightarrow P_5 = \frac{(\lambda / \mu)^5}{2! 2^{5-2}} P_0 = \frac{0.6829^5}{2 * 8} 0.4909 = 0.0046 ;$$

$$\begin{aligned} P(n > 5) &= 1 - (0.4909 + 0.3352 + 0.1145 + 0.0391 \\ &\quad + 0.0133 + 0.0046) \\ &= 0.0024 \end{aligned}$$

8. Peluang bahwa pelanggan harus mengantri di loket kasir.

$$\begin{aligned} P_w &= \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^S \frac{(S\mu)}{S! [S\mu - \lambda]} P_0 \\ &= 0.6829^2 \frac{57.1428}{2! (57.1428 - 19.5122)} 0.4909 = 0.3727 \end{aligned}$$

### 4.3 Soal Latihan

1. Suatu barber shop dengan pelayanan tunggal untuk pelanggan mempunyai distribusi waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan sebagai berikut :

Waktu Antar Kedatangan (menit)	Probabilitas	Waktu Pelayanan (menit)	Probabilitas
1	0.05	1	0.20
2	0.10	2	0.35
3	0.20	3	0.27
4	0.05	4	0.18
5	0.50		
6	0.10		

- a. Gunakan bilangan random dari tabel bilangan random dengan criteria pengambilan : 2 digit awal dari kiri ke kanan, untuk mensimulasikan waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan terhadap 25 pelanggan.
  - b. Dari hasil simulasi tersebut, tentukan waktu tunggu dalam antrian dan juga waktu kosong (idle time) dari tukang cukur tersebut.
2. Beth Komeau bekerja sendirian dalam salon kecantikannya. Ia telah mempelajari pola kedatangan langganannya dan telah menetapkan distribusi waktu antar kedatangan dan waktu pelayanannya (untuk memotong dan mengatur rambut pelanggan) sebagaimana pada tabel di bawah. Asumsikan bahwa bila seorang pelanggan tiba dan dua orang telah menunggu, pelanggan akan langsung pergi ke salon lain. Simulasikan sistem, mulai pukul 8 pagi untuk 15 pelanggan. Hitunglah waktu luang Beth dan jumlah hilangnya pelanggan.

Waktu Antar Kedatangan (menit)	Probabilitas	Waktu Pelayanan (menit)	Probabilitas
0	0.15	14	0.05
5	0.10	16	0.50
10	0.12	18	0.20
15	0.14	20	0.20
20	0.17	22	0.05
30	0.26		
40	0.06		

Ambil angka waktu antar kedatangan dari kolom 1 dan untuk waktu pelayanan dari kolom 2 pada table bilangan random, masing-masing mengambil 2 digit awal dari susunan angka acak 5 digit.

3. Sam Douglas, kepala cabang People's Bank and Trust company sedang mempertimbangkan untuk mengoperasikan fasilitas kilat (sehingga pelanggan tidak perlu keluar dari mobilnya untuk memperoleh pelayanan) di lokasi pusat Wallace Virginia. Studi penelitian pasar telah memproyeksikan waktu antar kedatangan pelanggan dan waktu pelayanan teller sebagai berikut :

Waktu Antar Kedatangan (menit)	Probabilitas	Waktu Pelayanan (menit)	Probabilitas
1	0.17	1	0.10
2	0.25	2	0.30
3	0.25	3	0.40
4	0.20	4	0.20
5	0.13		

Sebelum menandatangani kontrak pembangunannya, Sam hendak mengetahui berapa banyak ruangan untuk memungkinkan mobil menunggu. Ia juga ingin mengetahui rata-rata waktu tunggu untuk kedatangan pelanggan. Simulasikan operasi fasilitas untuk kedatangan sample 20 mobil dan tunjukkan kepada sam berapa besar ruangan yang harus disediakan. Jika lokasinya hanya terbatas untuk 3 mobil, berapa banyak pelanggan harus kembali karena kekurangan ruangan ? Berapa rata-rata waktu tunggu dalam sample anda ? Gunakan table bilangan random dengan mengambil 2 digit akhir dari bilangan random pada kolom 3.

4. Sebuah bengkel mesin berat selama ini hanya mempunyai sebuah alat untuk perbaikan. Apabila alat tersebut sedang digunakan maka ketika ada kedatangan pelanggan lain yang akan memperbaiki mesin, pelanggan tersebut harus menunggu dan dimungkinkan untuk pergi ke bengkel lain. Jelas kondisi ini merugikan bagi pemilik bengkel karena kehilangan pelanggan. Pemilik bengkel hendak mensimulasikan sistem jasa perbaikan mesin berat ini untuk menentukan pengadaan alat perbaikan seefisien dan semurah mungkin. Sebab pengadaan dan pengoperasian alat ini membutuhkan ongkos yang mahal. Berdasarkan hasil observasi, distribusi waktu antar kedatangan mesin yang rusak dan waktu perbaikan adalah sebagai berikut :

Waktu Antar Kedatangan (menit)	Probabilitas	Waktu Pelayanan (menit)	Probabilitas
180	0.20	50	0.50
190	0.30	60	0.36
200	0.25	70	0.08
210	0.12	80	0.04
220	0.08	90	0.02
230	0.05		

Simulasikan sistem untuk 15 pelanggan menggunakan 2 digit awal bilangan random kolom 4 dari table bilangan random. Katakanlah kerugian yang harus ditanggung pemilik bengkel akibat harus menyimpan mesin yang rusak selama menunggu adalah Rp. 10.000,-/mesin/jam, catatlah berapa total kerugian biaya penyimpanan selama simulasi ini. Dan apa rekomendasi anda apabila menyarankan kepada pemilik bengkel untuk menambah 1 buah peralatan perbaikan mesin yang baru ?