



## MODEL SISTEM ANTRIAN

### ♣ Pendahuluan

- Teori antrian ditemukan oleh AK Erlang seorang ahli matematika Denmark tahun 1909
- Sistem antrian berkembang karena fasilitas pelayanan (server) yang semakin mahal dan terbatas
- Hampir setiap organisasi selalu ada proses yang menimbulkan antrian
- Contoh antrian dalam kehidupan sehari-hari

Sistem	subjek kedatangan	antrian	fasilitas
Bandara	pesawat	mendarat	landasan
SPBU	kendaraan	pengisian bbm	pompa/ptgas
Toko	pelanggan	bayar belanja	kasir

Hal : 1



## MODEL SISTEM ANTRIAN

- Teori antrian dapat digunakan untuk memberikan informasi dalam membuat keputusan yang berkaitan dengan permasalahan antrian
- Tujuan utama teori antrian adalah untuk mencari kondisi keseimbangan antara ongkos pelayanan dengan ongkos yang disebabkan oleh adanya antrian

Contoh :

Swalayan yang mempunyai 6 buah kasir, agar dicapai keseimbangan, maka akan digunakan sistem buka tutup kasir sesuai dengan panjang antrian

Hal : 2

ada 2 faktor penting yang mempengaruhi tujuan dari sistem antrian :

1. Biaya akibat penyediaan pelayanan (*cost of providing service*)

Diusahakan tidak terlalu banyak fasilitas pelayanan yang menganggur (idle) karena akan menimbulkan biaya operasional tinggi

2. Biaya akibat ketidakpuasan kustomer (*cost of customer dissatisfaction*)

Tingginya permintaan layanan tanpa diikuti dengan kapasitas pelayanan yang memadai dapat menyebabkan ketidakpuasan pelanggan

♣ Komponen dan Karakteristik Model Sistem Antrian  
sistem antrian pada dasarnya terdiri dari 6 komponen, yaitu :

1. sumber input (*calling population*)

sumber input dapat berupa populasi individu seperti orang atau barang yang datang pada sistem untuk mendapat pelayanan.

Karakteristik yang perlu diketahui adalah ukuran populasi bisa terbatas atau tak terbatas

2. pola kedatangan (*arrival patern*)

cara individu-2 dari populasi dalam memasuki sistem antrian

- tingkat kedatangan ada yang tingkat kedatanganya konstan ada yang acak
- perilaku kedatangan ada yang berkelompok ada yang satu per satu

### 3. antrian (*queue*)

- antrian menunjukkan aktivitas individu yang menunggu untuk dilayani
- banyaknya individu dalam antrian disebut panjang antrian
- antrian terjadi jika kapasitas pelayanan lebih kecil dari jumlah individu yang memasuki sistem dan memerlukan pelayanan

ada 3 macam perilaku individu dalam antrian :

#### a. Balking

Perilaku individu yang meninggalkan sistem sebelum masuk antrian

#### b. Renege

Perilaku individu yang sudah masuk antrian tapi meninggalkan antrian sebelum dilayani

#### c. Jockey

Perilaku individu yang sudah masuk antrian kemudian pindah ke jalur antrian yang lain

### 4. Disiplin antrian

merupakan pedoman yang digunakan untuk menseleksi individu yang masuk antrian untuk dilayani lebih dulu ada 5 macam disiplin antrian :

1). FIFO (*First In First Out*) / FCFS (*First Come First Served*)

pelayanan disesuaikan dengan urutan kedatangan, individu yang pertama datang, maka akan dilayani terlebih dahulu

2). LIFO (*Last In First Out*) / LCFS (*Last Come First Served*)

individu yang terakhir datang, akan dilayani terlebih dahulu (berupa tumpukan)

Hal : 7

3). SIRO (*Service In Random Order*)

pelayanan dilakukan secara random atau acak contoh :

pelayanan di toko yang tidak punya jalur antrian

4). SOT (*Shortest Operating Time*) / SPT (*Shortest Processing Time*)

pelayanan yang membutuhkan waktu paling cepat akan dilayani dahulu

5). PR (*Priority*)

mendahulukan pelayanan pada individu dengan prioritas tertentu

Hal : 8



### 5. Waktu Pelayanan

menunjukkan waktu yang digunakan untuk melayani individu dalam suatu sistem

waktu pelayanan ini bisa konstan ataupun random

Ada 3 macam mekanisme pelayanan :

#### 1). Paralel

terdapat banyak fasilitas pelayanan untuk jenis pelayanan yang sama

#### 2). Seri

terdapat fasilitas pelayanan yang berjenjang dan harus dilalui oleh setiap individu

Hal : 9

#### 3). Kombinasi Paralel dan Seri

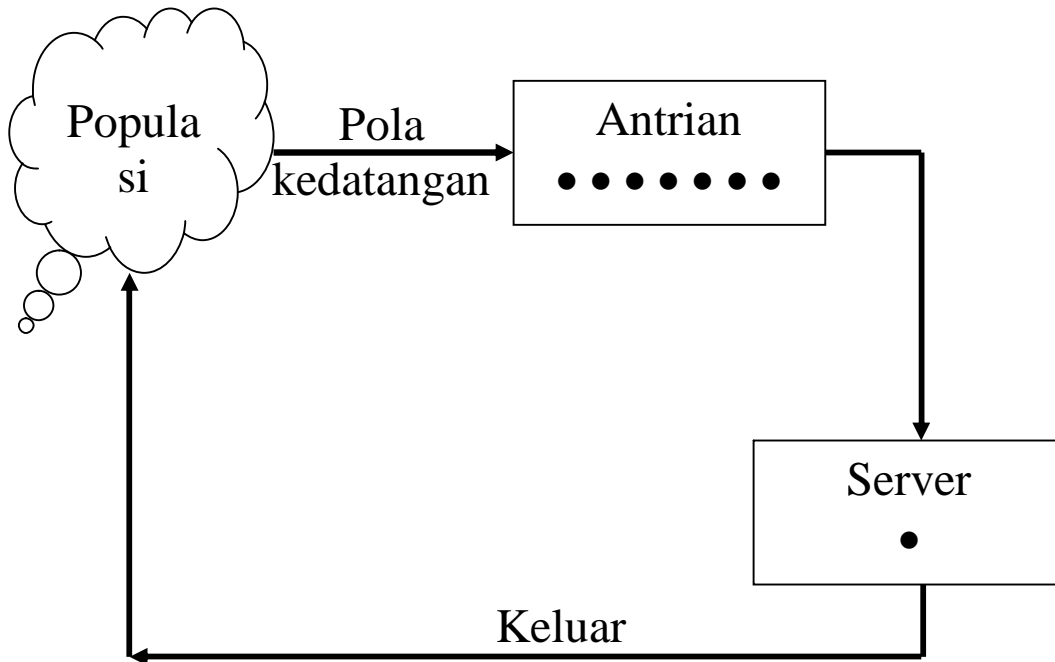
terdapat banyak fasilitas pelayanan untuk setiap jenjang

### 6. Keluar

sesudah individu dilayani, maka individu tersebut dianggap telah keluar dari sistem (departure) dan bergabung dengan populasi kembali

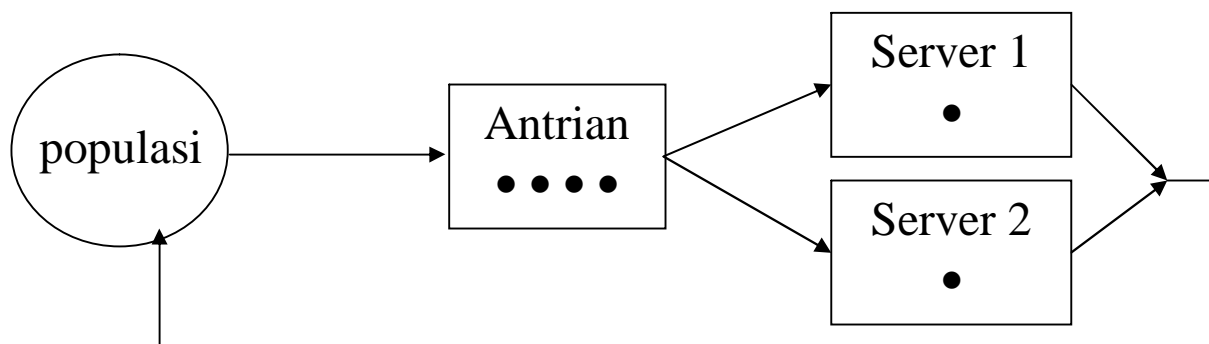
Hal : 10

Sistem Antrian :

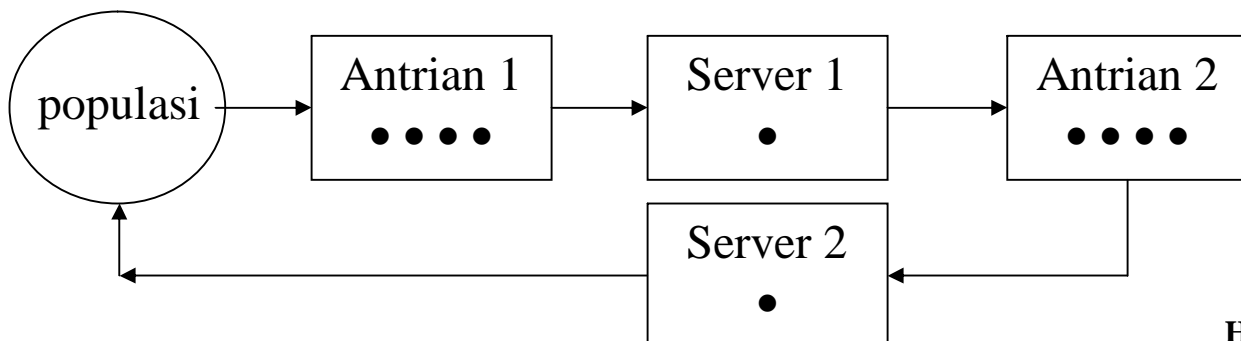


Hal : 11

Paralel :



Seri :



Hal : 12

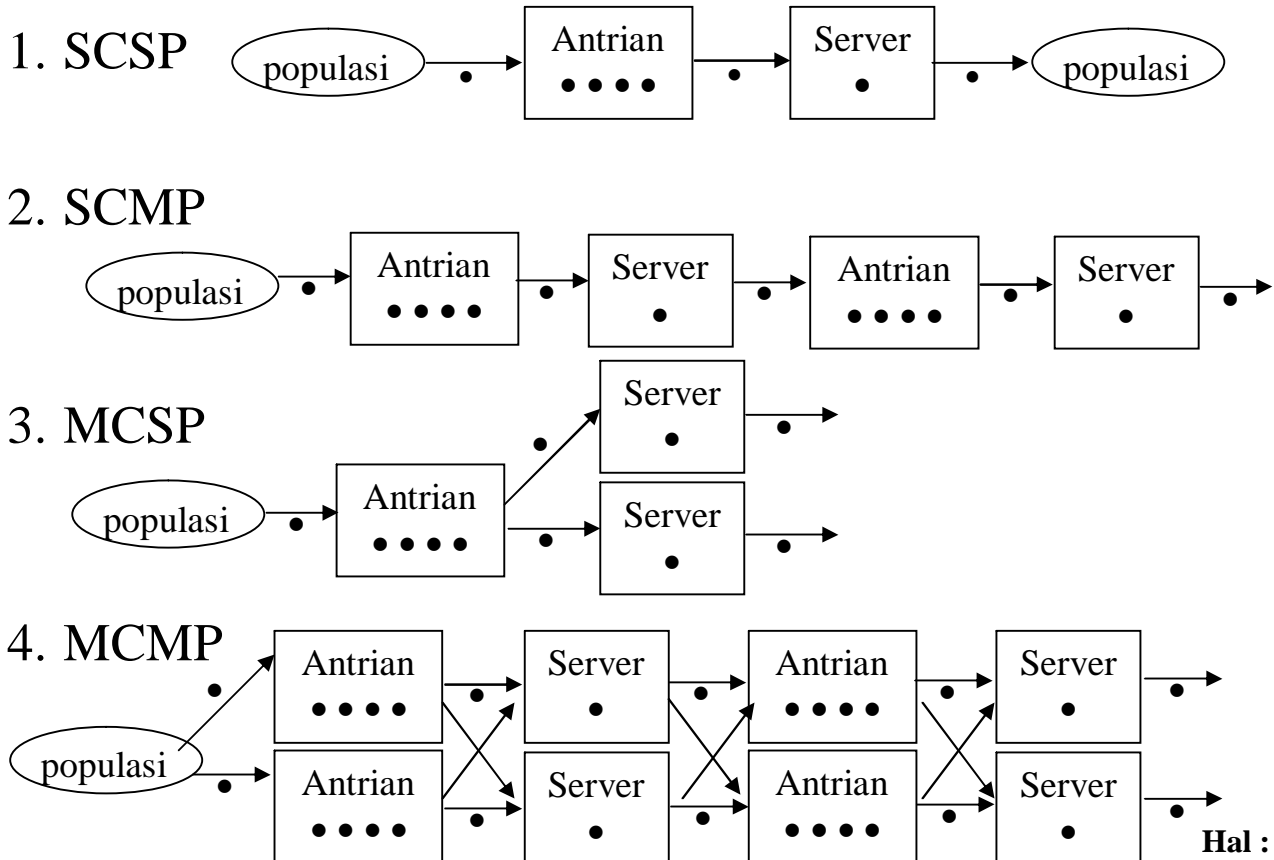
### ♣ Struktur Model Antrian

berdasarkan sifat dari proses pelayanannya, model sistem dapat dikelompokkan berdasarkan fasilitas pelayannya :

- Channel (single atau multiple)  
Channel menunjukkan jumlah saluran atau jalur masuk ke dalam sistem
- Phase (single atau multiple)  
Phase menunjukkan jumlah server yang harus dilalui oleh individu dalam sistem agar pelayanan yang diterima lengkap

berdasarkan Channel dan Phasenya, model antrian dikelompokkan menjadi :

- 1). Single Channel Single Phase (SCSP)  
terdapat saluran dan pelayanan tunggal
- 2). Single Chanel Multi Phase (SCMP)  
sistem ini hanya terdapat satu saluran masuk dan lebih dari satu server yang bertingkat
- 3). Multi Channel Single Phase (MCSP)  
sistem ini terdapat lebih dari satu saluran masuk dan terdapat lebih dari satu server yang sejenis
- 4). Multi Channel Multi Phase (MCMP)  
sistem ini memiliki lebih dari satu saluran masuk dan server yang bertingkat



Hal : 15

♣ Notasi Model dan Notasi Ukuran Kinerja  
 untuk menyederhanakan penggunaan symbol-simbol dan asumsi-asumsi yang dimiliki oleh model, digunakan notasi kendall dengan format :

tingkat kedatangan	tingkat pelayanan	jumlah server	besar populasi	panjang antrian
--------------------	-------------------	---------------	----------------	-----------------

- tingkat kedatangan : M untuk random berdistribusi Poisson, D untuk konstan, E untuk random berdistribusi Erlang dan G untuk normal dengan rata-rata  $\mu$  dan varians  $\sigma^2$

Hal : 16



## MODEL SISTEM ANTRIAN

- Tingkat pelayanan : M untuk random berdistribusi eksponensial, D untuk konstan, E untuk random berdistribusi Erlang dan G untuk distribusi normal dengan rata-rata  $\mu$  dan varians  $\sigma^2$
- Jumlah server : S (jumlah fasilitas pelayanan) tunggal atau banyak
- Besar Populasi : I untuk infinite, F untuk Finite (terbatas)
- Panjang Antrian/Kapasitas Sistem : I untuk infinite, F untuk Finite (terbatas)

Contoh :

$$M / M / 1 / I / I$$



## MODEL SISTEM ANTRIAN

### ♣ Notasi Variabel Kinerja Sistem Antrian

Notasi	Keterangan	Ukuran
$\lambda$	: tingkat kedatangan rata-rata	unit/jam
$1/\lambda$	: waktu antar kedatangan rata-rata	jam/unit
$\mu$	: tingkat pelayanan rata-rata	unit/jam
$1/\mu$	: waktu antar pelayanan rata-rata	jam/unit
N	: jml individu dlm sistem dlm waktu tertn	unit
$L_q$	: jml individu rata-2 dalam antrian	unit
$L_s$	: jml individu dlm sistem total	unit
$W_q$	: waktu rata-rata dlm antrian	jam
$W_s$	: waktu rata-rata dlm sistem total	jam
S	: jumlah fasilitas pelayanan (server)	unit
P	: tingkat kegunaan fasilitas pelayanan	persen

M	: panjang maksimum kapasitas sistem	unit
$P_n$	: probabilitas juml n individu dlm sistem	frek.rel
$P_o$	: probabilitas tidak ada individu dlm sistem	frek.rel
$P_w$	: probabilitas menunggu dlm antrian	frek.rel

### Contoh Aplikasi Model Antrian :

#### a. single server : M/M/1/I/I

- Tingkat kedatangan M = random berdistribusi poison
- Tingkat pelayanan M = random berdistribusi eksponensial

#### b. ukuran kinerja :

- tingkat kegunaan server :  $P = \lambda / \mu$
- jumlah individu dalam antrian :  $L_q = \lambda^2 / \mu(\mu - \lambda)$
- jumlah individu dalam sistem :  $L_s = \lambda / (\mu - \lambda)$
- waktu rata-rata dlm antrian :  $W_q = \lambda / \mu(\mu - \lambda)$
- waktu menunggu rata-rata dlm sistem :  $W_s = 1 / (\mu - \lambda)$
- prob terdapat n individu dlm sistem :  $P_n = (1 - P)P^n$



Sebuah restoran melayani pelangganya langsung di dalam mobil mereka, restoran ini telah, tetapi manajer pemasaran prihatin dengan panjangnya antrian pada jam-jam sibuk, yaitu saat makan siang dan malam, beberapa pelanggan sering mengadu tentang waktu menunggu yang berlebihan, dengan kondisi ini, manajer merasa akan kehilangan pelanggan, tingkat kedatangan rata-rata pelanggan selama periode puncak mencapai 50 mobil/jam tingkat kedatangan diasumsikan random berdistribusi Poisson, waktu pelayanan rata-rata 1 menit / mobil sedangkan tingkat pelayanan random berdistribusi eksponensial, lakukan analisis ini dengan menghitung ukuran kinerja (performance measure) dari restoran ini

- Hal : 21



Tingkat kedatangan :  $\lambda = 50$  mobil /jam, Waktu pelayanan :  $1/\mu = 1$  menit / mobil sehingga tingkat pelayanan  $\mu = 60$  mobil /jam

ukuran kinerja :

- Hal : 22

Contoh Aplikasi Model Antrian :

a. single server : M/G/1/I/I

- Tingkat kedatangan M = random berdistribusi poisson
- Tingkat pelayanan G = berdistribusi normal dengan rata-rata  $\mu$  dan varians  $\sigma^2$

b. ukuran kinerja :

- tingkat kegunaan server :  $P = \lambda / \mu$
- jumlah individu dalam antrian (panjang antrian) :  
$$L_q = (\lambda^2 \sigma^2 + P^2) / 2 (1-P)$$
- jumlah individu dalam sistem :  $L_s = L_q + P$
- waktu rata-rata dlm antrian :  $W_q = L_q / \lambda$
- waktu rata-rata dlm sistem :  $W_s = W_q + (1/\mu)$
- prob terdapat 0 individu dlm sistem :  $P_0 = 1-P$

Hal : 23

Contoh :

Truk tiba pada suatu fasilitas untuk dikosongkan dalam pola karakteristik sebagai distribusi poisson, rata-rata tingkat kedatangan 3 truk / jam, waktu pelayanan distribusi normal dengan rata-rata waktu pelayanan 1,5 menit dan standar deviasi 0,2 menit, pengemudi dibayar sebesar Rp. 50.000 / jam dan ia tidak harus mengosongkan truknya sendiri, berapa besar pengeluaran rata-rata dari perusahaan truk akibat waktu menganggur dari tiap pengemudi ketika berada pada fasilitas itu

Hal : 24



Diketahui :

- a. single server :  $M/G/1/I/I$ , karena pelayanan mengikuti distribusi normal dengan rata-rata  $1/\mu$  dan varians  $\sigma^2$
- b. tingkat kedatangan :  $\lambda = 3$  truk/jam  
waktu pelayanan :  $1/\mu = 1,5$  menit/truk dan  $\sigma = 0,2$  menit atau 0,0033 jam  
tingkat pelayanan :  $\mu = 40$  truk/jam
- c. ukuran kinerja :
  - tingkat kegunaan server :  $P = 3 / 40 = 0,075$
  - jumlah individu dalam antrian (panjang antrian) :  
$$L_q = (3^2 \cdot 0,2^2 + 0,075^2) / 2 (1 - 0,075) = 0,003094 \text{ truk}$$
  - waktu rata-rata dlm antrian :  
$$W_q = 0,003094 / 3 = 0,001031 \text{ jam}$$

Hal : 25

- waktu rata-rata dlm sistem :  
$$W_s = 0,001031 + (1/40) = 0,026031 \text{ jam}$$

Jadi setiap pengemudi berada dalam sistem 0,026031 jam, ini adalah waktu pengemudi menganggur, sehingga perusahaan merasa rugi sebesar  $\text{Rp. } 50.000 \times 0,026031 = \text{Rp. } 1.301,559$ .

Hal : 26

### Contoh Aplikasi Model Antrian :

#### a. single server : M/D/1/I/I

- Tingkat kedatangan  $M$  = random berdistribusi poisson
- Tingkat pelayanan  $D$  = konstan / tetap sehingga  $\sigma^2=0$

#### b. ukuran kinerja :

- tingkat kegunaan server :  $P = \lambda / \mu$
- jumlah individu dalam antrian (panjang antrian) :  
$$L_q = P^2 / 2 (1-P)$$
- jumlah individu dalam sistem :  $L_s = L_q + P$
- waktu rata-rata dlm antrian :  $W_q = L_q / \lambda$
- waktu rata-rata dlm sistem :  $W_s = W_q + (1/\mu)$
- prob terdapat 0 individu dlm sistem :  $P_0 = 1-P$

### Contoh Soal :

Pemilik kedai minuman akan menguji mesin pembuat jus jeruk otomatis yang dapat mengupas dan memeras jeruk serta menuangkan air ke dalam gelas sehingga pemilik tinggal mengambil jus jeruk siap saji dari mesin tersebut. Dalam memproses sebuah jeruk menjadi jus siap saji, mesin ini memerlukan waktu yang konstan yaitu 2 menit/pembeli. Kelihatanya menyenangkan. Namun mesin tersebut memerlukan ongkos tambahan biaya listrik. Sebelum membeli mesin tersebut , pemilik akan melakukan simulasi guna mengetahui sampai berapa besar manfaat dari mesin tersebut. Dari pengalaman sehari-hari, tingkat permintaan jus jeruk rata-rata sebesar 10 pembeli per jamnya dan diasumsikan berdistribusi poisson. Tentukan :

- tingkat kegunaan mesin tersebut
- berapa jumlah pembeli yang menunggu mendapatkan jus jeruk
- waktu rata-rata yang diperlukan oleh pembeli untuk mendapatkan jus jeruk
- jumlah pembeli dalam sistem
- waktu rata-rata yang dibutuhkan pembeli dalam sistem

Contoh Aplikasi Model Antrian :

a. single server : M/M/1/I/F

- Tingkat kedatangan M = random berdistribusi poisson
- Tingkat pelayanan M = random distribusi eksponensi
- Panjang Antrian/Kapasitas Sistem F = terbatas sebesar M

b. ukuran kinerja :

- tingkat kegunaan server :  $P = \lambda / \mu$
- probabilitas tidak terdapat individu dlm sistem :  

$$P_0 = (1-P) / (1-P^{M+1})$$
- proporsi individu yg hilang karena sistem penuh :  

$$P_M = P^M P_0$$

Hal : 29

- probabilitas fasilitas pelayanan sibuk :  $P_w = 1 - P_0$
- jumlah individu dalam sistem :  $L_s = (P_q - M P P_M) / (1-P)$
- jumlah individu dalam antrian:  $L_q = L_s - (\lambda(1-P_M)) / \mu$
- waktu rata-rata dalam sistem :  $W_s = L_s / (\lambda(1-P_M))$
- waktu rata-rata dalam antrian :  $W_q = W_s - (1 / \mu)$
- probabilitas terdapat N individu dalam sistem :  

$$P_N = (1-p).P^N / (1-P^{M+1})$$

Contoh Soal :

Restoran M saat ini merupakan salah satu restoran yang paling diminati di kota semarang karena masakan fast foodnya yang lezat. Pemilik restoran agak pusing, karena lahan parkir yang dimilikinya hanya cukup untuk menampung 15 mobil saja dan kalau tampak penuh, maka calon pembeli lain akhirnya tidak jadi makan di restoran tersebut. Tingkat kedatangan pengunjung pada jam sibuk rata-rata 14 mobil per jamnya dan didistribusikan secara poisson. Dan tingkat pelayanan rata-rata 20 orang per jam yang basa dilayani dan didistribusikan secara eksponensial. Lakukan analisis terhadap kinerja sistem yang ada saat ini dan dibandingkan apabila pimpinan berniat memperluas lahan parkir sehingga cukup untuk 25 mobil atau 30 mobil, lebih baik atau lebih buruk ?

Hal : 30

Contoh Aplikasi Model Antrian :

a. multi server : M/M/S/I/I

- Tingkat kedatangan M = random berdistribusi poisson
- Tingkat pelayanan M = random distribusi eksponensi
- Jumlah server S = lebih dari 1, misal S server mempunyai pelayanan yg sama

b. ukuran kinerja :

- tingkat kegunaan server :  $P = \lambda / S\mu$
- probabilitas tidak terdapat individu dlm sistem :

$$P_o = 1 / Jml$$

$$Jml = \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s! (1 - P)}$$

Hal : 31

- Probabilitas terdapat n individu dalam sistem

$$P_n = (\lambda/\mu)^n P_o / n! \quad ; \text{ jika } 0 \leq n \leq s$$

$$P_n = (\lambda/\mu)^n P_o / S! S^{n-s} \quad ; \text{ jika } n > s$$

- probabilitas semua server sibuk :

$$P_w = (\lambda/\mu)^s (S\mu) P_o / (S! (S\mu - \lambda))$$

- rata-rata jumlah individu dalam sistem :

$$L_s = [ (\lambda/\mu) (\lambda/\mu)^s P_o / (S-1)! (S\mu - \lambda)^2 ] + (\lambda/\mu)$$

- rata-rata jumlah individu dalam antrian :

$$L_q = L_s - (\lambda/\mu)$$

- waktu rata-rata dalam sistem :  $W_s = L_s / \lambda$

- waktu rata-rata dalam antrian :  $W_q = L_q / \lambda$

Hal : 32

### Contoh Soal :

Sebuah minimarket mempunyai 2 kasir untuk melayani pembayaran dari pembeli yang berbelanja. Akhir-akhir ini pimpinan sering melihat adanya antrian pembeli yang akan membayar ke kasir dan berencana untuk menambah seorang kasir lagi. Bila diperkirakan tingkat kedatangan pembeli adalah 8 orang per jam dan tingkat pelayanan dari setiap kasir adalah 5 orang per jam yang dapat dilayani, maka lakukan simulasi untuk mengetahui bagaimana perubahan kinerja sistem apabila dilakukan penambahan kasir menjadi 3 orang, bagaimana keputusan pimpinan apakah jadi menambah 1 kasir lagi ? mengapa ?

Hal : 33

### Contoh Aplikasi Model Antrian :

#### a. multi server : M/M/~ /I/I

- Tingkat kedatangan  $M$  = random berdistribusi poisson
- Tingkat pelayanan  $M$  = random distribusi eksponensi
- Jumlah server  $S$  = tidak terbatas ( $\sim$ ) jika setiap pembeli dapat melayani diri sendiri

#### b. ukuran kinerja :

- Probabilitas tidak ada individu dalam sistem :

$$P_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

- Probabilitas terdapat  $n$  individu dalam sistem :

$$P_n = P_0 (\lambda/\mu)^n / n!$$

- Rata-rata jumlah individu dalam sistem :  $L_s = \lambda/\mu$

Hal : 34



## MODEL SISTEM ANTRIAN

---

- Rata-rata jumlah individu dalam antrian :  $L_q = 0$
- Waktu rata-rata dalam sistem :  $W_s = 1/\mu$
- Waktu rata-rata dalam antrian :  $W_q = 0$

Contoh Soal :

Sebuah hotel menyediakan layanan restoran bagi tamu-tamunya yang menginap. Bagi tamu yang menginap dapat mengambil sendiri berbagai makanan dan minuman yang sudah disediakan secara gratis pada saat jam-jam makan sebagai salah satu fasilitas menginap di hotel tersebut. Tingkat kedatangan tamu yang memanfaatkan fasilitas tersebut rata-rata adalah 45 orang per hari dan didistribusikan secara poisson, sedangkan setiap tamu rata-rata membutuhkan waktu 1,5 menit untuk mengambil makanan dan minuman, sebagai bahan evaluasi bagi manager restoran, lakukan analisis apakah penyediaan fasilitas restoran secara swalayan tersebut layak atau tidak sebelum manager mengambil keputusan lain ?

Hal : 35



## MODEL SISTEM ANTRIAN

---

### ***TUGAS 3 :***

**KERJAKAN SOAL YANG TERDAPAT PADA HALAMAN 28, 30, 33 DAN 35**

Catatan :

Dalam menjawab disertai dengan data yang diperoleh dari perhitungan :

Hal : 36

### Pola Kedatangan :

Antar waktu kedatangan adalah cara yang dipakai untuk menggambarkan pola kedatangan dengan mendefinisikan interval antar kedatangan yang berurutan, yaitu :

1. untuk satu pola yang tidak memiliki variansi, maka waktu antar kedatangannya konstan
2. untuk satu pola yang berubah-ubah, maka diperlukan fungsi probabilitas antar waktu kedatangan, antara lain :
  - pola kedatangan Poisson  
terjadi secara acak, artinya waktu kedatangan berikutnya tidak tergantung pada kedatangan sebelumnya

Hal : 37

- pola kedatangan Erlang  
misalkan entitas 1 masuk menuju ke server 1, server 2 dan server 3 untuk dilayani secara bertingkat, jika entitas 1 belum selesai dilayani oleh ke 3 server, maka entitas 2 tidak boleh masuk ke server 1 menunggu entitas 1 selesai dilayani oleh server 3
- 

Hal : 38

