BAB 6
PEMODELAN SIMULASI SISTEM KONTINU

6.1 Pendahuluan

Pemodelan simulasi sistem kontinu membahas mengenai perilaku nilai-nilai variabel di dalam sistem yang berubah secara kontinu baik secara spasial (koordinat) maupun secara temporal (waktu). Perubahan-perubahan atas nilai-nilai variabel dalam sistem kontinu biasanya diformulasikan dalam model matematis yaitu model persamaan diferensial (Differential Equation). Model persamaan diferensial juga sering digunakan untuk menjelaskan berbagai fenomena fisik dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam bidang sains, rekayasa, ekonomi, biologi, teknologi pangan, fisika, farmasi, kimia, mekanika, listrik, teknik sipil dan lain-lain. Penggunaan model dalam berbagai bidang aplikasi ini sangat menguntungkan daripada membahas sistem fisik secara langsung. Sebab berbagai keadaan spasial dan temporal sebuah sistem secara fisik dapat dengan mudah dilakukan hanya dengan menggunakan model logiknya.

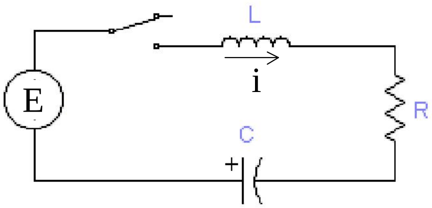
Beberapa contoh sistem yang menggunakan model-model persamaan diferensial ini antara lain :

- Bidang Fisika
  Hukum Newton II menyatakan percepatan (a) sebagai laju perubahan kecepatan (dv) setiap waktu (dt), dinyatakan sebagai :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

- Bidang Listrik
  Hukum tegangan Kierchoff menyatakan bahwa jumlah aljabar dari perubahan tegangan di sekeliling rangkaian tertutup adalah nol.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{q}{C} - E(t) = 0$$



dimana *L(di/dt)* adalah perubahan tegangan antara induktor, *L* adalah induktansi kumparan (*henry*), *R* adalah tahanan (*ohm*), *q* adalah muatan pada kapasitor (*coulomb*), *C* adalah kapasitansi (*farad*) dan *E(t)* adalah tegangan yang berubah terhadap waktu.

- Bidang Biologi

  Laju pertumbuhan bakteri pada waktu *t* sebanding dengan jumlah bakteri (*p*) pada saat itu, dinyatakan dengan :

  $$\frac{dp}{dt} = kp \text{ ; } k = \text{konstanta kesebandingan.}$$

Dengan mengintegralkan model-model persamaan diferensial tersebut maka akan dihasilkan fungsi matematis yang dapat digunakan untuk menjelaskan berbagai keadaan spasial maupun keadaan temporal. Hal ini dapat diperoleh dengan menentukan solusi atau penyelesaian dari model persamaan diferensial tersebut. Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan fungsi. Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi 2 macam tergantung pada jumlah variable bebas. Apabila persamaan tersebut mengandung hanya satu variable bebas maka disebut persamaan diferensial biasa (PDB) atau ordinary differential equation (ODE). Dan jika mengandung lebih dari satu variable bebas disebut persamaan diferensial parsial (PDP) atau Partial Differential Equation (PDE). Derajat atau orde dari persamaan diferensial ditentukan oleh derajat tertinggi dari turunannya.

- **Persamaan Diferensial Biasa (PDB)**

PDB adalah PD yang hanya mempunyai satu variabel bebas diferensial. Misalnya pada persamaan berikut :

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

$$2\frac{dy}{dx} + x^2 y - y = 0$$

Berdasarkan turunan tertinggi yang terdapat pada persamaannya, PDB dapat dikelompokkan menurut ordenya, misalnya :

$$2\frac{dy}{dx} + x^2 y - y = 0 \quad \text{; PDB orde 1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cos(x) - 3y = \sin(2x) \text{ ; PDB orde 2}$$

$$2\frac{d^3 y}{dx^3} - 23\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ; PDB orde 3}$$

dan seterusnya.

- **Persamaan Diferensial Parsial (PDP)**
  PDP adalah PD yang mempunyai lebih dari satu variabel bebas diferensial dan turunan fungsinya dilakukan secara parsial.
  Contoh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y}; u = g(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\sin(x+t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; u = g(x, y, t)$$

6.2 Solusi Persamaan Diferensial

Sebagaimana halnya pada persamaan biasa, masalah utama yang dihadapi apabila kita bekerja dengan persamaan diferensial adalah menentukan solusi atau penyelesaiannya. Solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial dan juga memenuhi kondisi-kondisi awal yang diberikan pada persamaan tersebut. Terdapat 2 macam solusi persamaan diferensial, yaitu :

- **Solusi Analitik**

  Fokus dari solusi analitik ini adalah menentukan bentuk fungsi tertentu sedeemikian sehingga memenuhi PD dan kondisi-kondisi awal yang diberikan. Didalam menentukan solusi analitik ini biasanya dicari solusi umum yang masih mengandung konstanta terlebih dahulu, kemudian mencari solusi khusus dengan mengevaluasi nilai konstanta tersebut sesuai dengan kondisi awal.

  Contoh :

  Laju pertumbuhan bakteri pada waktu *t* sebanding dengan jumlah bakteri (*p*) pada saat itu, dinyatakan dengan :

  $$\frac{dp}{dt} = kp \text{ ; } k = \text{konstanta kesebandingan.}$$

  Tentukan model pertumbuhan bakteri tersebut sebagai fungsi atas waktu.

  $$\frac{dp}{dt} = kp$$

  $$\frac{dp}{p} = k\,dt$$

  $$\int \frac{1}{p}\,dp = \int k\,dt$$

  $ln(p) + \mathrm{C1} = kt + \mathrm{C2}$

  $ln(p) = kt + (\mathrm{C2} - \mathrm{C1})$

  $ln(p) = kt + \mathrm{C}$

  $$p = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C} = p_o e^{k^t} ; p_o = e^{C}$$

  Jadi solusi analitiknya $p = p_o e^{kt}$ dimana p_o adalah jumlah bakteri pada $t = 0$.

Proses memperoleh solusi analitik ini mempunyai tingkat kerumitan dan tingkat kesulitan yang tinggi sesuai dengan kompleksitas model persamaan diferensialnya. Sehingga untuk memperoleh hasil yang akurat, disarankan adanya pemanfaatan software komputer guna menyelesaikan persamaan diferensial. Beberapa software matematis yang bisa dimanfaatkan untuk keperluan ini antara lain MATLAB, MAPLE, MATHCAD, MATHEMATICA dll. Selain kemudahan dalam memperoleh solusi, software-software tersebut juga menyediakan fasilitas grafis yang memudahkan kita untuk memberikan penafasiran dan analisis terhadap model. Diantara software-software tersebut bahkan menyediakan fasilitas desain programmingnya sehingga dapat dimanfaatkan untuk rekayasa perangkat lunak matematis.

- **Solusi Numerik**

Solusi numerik biasanya digunakan ketika solusi analitiknya sulit diperoleh dalam praktek, misalnya dikarenakan model persamaan diferensialnya rumit atau terlalu kompleks. Sehingga dalam hal ini, solusi numerik cenderung bersifat sebagai solusi pendekatan/hampiran. Berbeda dengan solusi analitik yang menghasilkan solusi dalam bentuk fungsionalnya, solusi numerik hanya menghasilkan nilai-nilai numerik (sebagai hampiran dari nilai fungsi) tanpa harus menghasilkan bentuk fungsinya.

Beberapa pendekatan metode numerik dalam penyelesaian PDB akan dimanfaatkan uuntuk menganalisis berbagai aplikasi dari model-model sistem kontinu. Sedangkan simulasi model dalam hal ini dilakukan dengan melakukan komputasi untuk menentukan nilai-nilai hampiran fungsi solusi dari model sesuai dengan metode numerik yang digunakan, sebagai representasi dari nilai-nilai keadaan dari sistem kontinu yang dibahas.

Catatan : Dalam buku ini, kita akan menggunakan pendekatan numerik untuk menentukan solusi persaman diferenasial yang akan kita bahas selanjutnya.

6.3 Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa

A. Metode Euler

Diketahui PDB Orde 1 :

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \text{ dan nilai awal } y(x_o) = y_o$$

Metode Euler diturunkan dari deret Taylor :

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\frac{\Delta x}{1!} + y_i''\frac{\Delta x^2}{2!} + y_i'''\frac{\Delta x^3}{3!} + ...$$

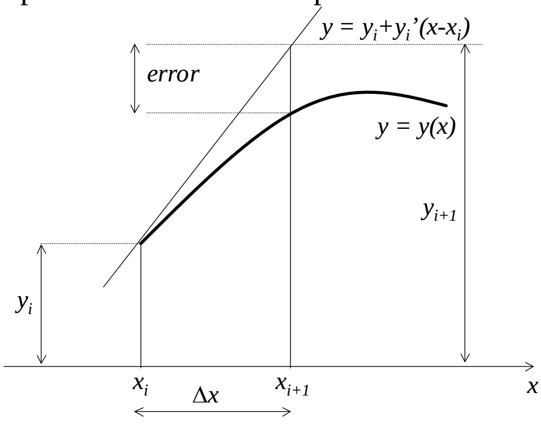
$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \text{ ; } i = 1,2,3, \ldots$$

Apabila nilai Δx kecil maka suku Δx^2, Δx^3, … akan sangat kecil dan dapat diabaikan. Sehingga untuk deeret Taylor orde 1 diperoleh :

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\Delta x \text{ atau}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Solusi y_{i+1} ini disebut solusi dari metode Euler. Nilai y_{i+1} diprediksi dengan menggunakan kemiringan untuk diekstrrapolasikan secara linier pada luasan Δx.



Tafsiran Geometri Metode Euler

Contoh :

Diketahui PDB :

$$\frac{dy}{dx} = x + y; y(0)=1$$

Dengan metode Euler, tentukan nilai $y(0.10)$ dengan menggunakan $\Delta x = 0.02$.

$f(x,y) = x+y$; $\Delta x = 0.02$; $(x_o,y_o) = (0,1)$; $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$

$x_o = 0 \rightarrow y_o = 1$

$x_1 = 0.02 \rightarrow y_1 = y_o + f(x_o,y_o)\Delta x = 1 + f(0,1)\ (0.02) = 1 + 0.02 = 1.02$

$x_2 = 0.04 \rightarrow y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)\Delta x = 1.02 + f(0.02,1.02)\ (0.02) = 1.02 + (1.04)(0.02) = 1.041$

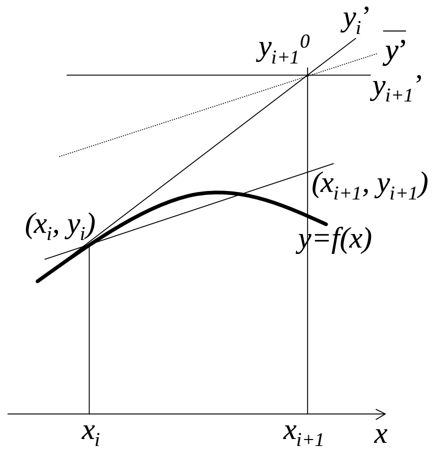
$x_3 = 0.06 \rightarrow y_3 = y_2 + f(x_2,y_2)\Delta x = 1.041 + f(0.04,1.041)\ (0.02) = 1.041 + (1.081)(0.02) = 1.062$

$x_4 = 0.08 \rightarrow y_4 = y_3 + f(x_3,y_3)\Delta x = 1.062 + f(0.06,1.062)\ (0.02) = 1.062 + (1.122)(0.02) = 1.085$

$x_5 = 0.10 \rightarrow y_5 = y_4 + f(x_4,y_4)\Delta x = 1.085 + f(0.08,1.085)\ (0.02) = 1.085 + (1.165)(0.02) = 1.108$

B. Metode Heun (Perbaikan Metode Euler)

Metode Euler mempunyai ketelitian yang rendah karena nilai kesalahannya terlalu besar. Metodee Heun merupakan modifikasi dari metode Euler dengan tujuan untuk mengurangi nilai kesalahan ini. Modifikasi yang dilakukan adalah pada perkiraan nilai kemiringan. Pada metode Euler kemiringan hanya diperkirakan pada salah satu titik ujung interval. Sedangkan metode Heun memperkirakan nilai turunan pada interval yaitu pada ujung awal dan ujung akhir. Kedua turunan ini kemudian diratakan untuk mendapatkan perkiraan kemiringan yang lebih baik. Jadi dalam hal ini, solusi pada metoded Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (predictor) dan kemudian solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan metode Heun (corrector).



Tafsiran Geometri Metode Heun

Berdasarkan metode Euler, kemiringan pada ujung awal dari interval yaitu $y_i^{'} = f(x_i, y_i)$ digunakan untuk ekstrapolasi linier ke nilai y_{i+1}, yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Hasil ini merupakan solusi dari metode Euler dan selanjutnya dipakai sebagai solusi perkiraan awal (predictor) dari metode Heun.

$$\text{Predictor : } y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Nilai y_{i+1}^0 lalu digunakan untuk memperkirakan kemiringan pada ujung akhir interval, yaitu $y_{i+1}^{'} = f(x_i, y_{i+1}^0)$. Sehingga diperoleh rata-rata kemiringan sebesar :

$$\overline{y}' = \frac{y_i^{'} + y_{i+1}^{'}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$

Nilai ini kemudian digunakan untuk ekstrapolasi linier dari y_i ke y_{i+1} dengan metode Euler kembali, yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + \overline{y}'\,\Delta x \text{ atau}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}\Delta x$$

Jadi solusi dengan menggunakan Metode Heun adalah sebagai berikut :

$$\text{Predictor : } y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

$$\text{Corrector : } y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}\Delta x$$

Contoh :

Diketahui PDB :

$$\frac{dy}{dx} = x + y; y(0) = 1$$

Dengan metode Heun, tentukan nilai $y(0.10)$ dengan menggunakan $\Delta x = 0.02$.

Penyelesaian :

$f(x,y) = x+y$, $\Delta x = 0.02$ dan $(x_o,y_o) = (0,1)$.

$x_o = 0$ → $y_o = 1$

$$y_0' = f(x_0, y_0) = 0 + 1 = 1$$

$$y_1^0 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x = 1 + (1)(0.02) = 1.02$$

$$y_1' = f(x_1, y_1^0) = f(0.02, 1.02) = 0.02 + 1.02 = 1.04$$

$$\overline{y'} = \frac{y_0' + y_1'}{2} = \frac{1 + 1.04}{2} = \frac{2.04}{2} = 1.02$$

$$y_1 = y_0 + \overline{y'}\Delta x = 1 + (1.02)(0.02) = 1 + 0.0204 = 1.0204$$

$x_1 = 0.02$ → $y_1 = 1.0204$

$$y_1' = f(x_1, y_1) = f(0.02, 1.0204) = 0.02 + 1.0204 = 1.0404$$

$y_2^0 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x =$ 1.0204 + (1.0404)(0.02) = 1.0412

$y_2' = f(x_2, y_2^0) = f(0.04, 1.0412)$ = 0.04 + 1.0412 = 1.0812

$$\overline{y'} = \frac{y_1' + y_2'}{2} = \frac{1.0404 + 1.0812}{2} = \frac{2.1216}{2} = 1.0608$$

$y_2 = y_1 + \overline{y'}\Delta x =$ 1.0204 + (1.0608)(0.02) = 1.0204+ 0.0212 = 1.0416

dan seterusnya, sehingga diperoleh :

x_i	y_i	y_i'	y_{i+1}^0	y_{i+1}'	$\overline{y'}$	y_{i+1}
0	1	1	1.02	1.04	1.02	1.0204
0.02	1.0204	1.0404	1.0412	1.0812	1.0608	1.0416
0.04	1.0416	1.0816	1.0632	1.1232	1.1024	1.0637
0.06	1.0637	1.1237	1.0861	1.1661	1.1449	1.0866
0.08	1.0866	1.1666	1.1099	1.2099	1.1882	1.1103
0.10	1.1103					

Jadi y(0.10) = 1.1103.

Soal Latihan

Selesaikan PDB-PDB berikut menggunakan : metode Euler dan metode Heun.

1. $\frac{dy}{dt} = -y^2; y(0) = 1;$Δt = 0.01;dari t = 0 hingga t = 0.05
2. $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5; y(0) = 1;$Δx = 0.02;dari x = 0 hingga x = 0.10
3. $\frac{dy}{dx} = e^x; y(0) = 1;$ Δx = 0.05 ; dari x = 0 hingga x = 0.40

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y; y(0) = 1$;Δx = 0.25 ; dari x = 0 hingga x = 0.50

6.4 Beberapa Aplikasi Model Sistem Kontinu

A. Model Peluruhan Radioaktif

Suatu percobaan menunjukkan bahwa suatu unsur radioaktif YYY meluruh dengan laju yang sebanding dengan banyaknya unsur saat ini. Proses fisis ini dinyatakan oleh persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Bila konstanta peluruhan untuk unsur tersebut adalah – 0.5, dan banyaknya unsur mula-mula (pada saat t = 0 detik) adalah 3 gr, apa yang terjadi dengan banyaknya unsur yang tersisa kemudian ?. Simulasikan hingga saat t = 5 detik menggunakan metode Euler untuk perubahan waktu setiap 0.5 detik.

Misal permasalahan di atas akan diselesaikan dengan metode Euler.

$f(t,y) = ty$

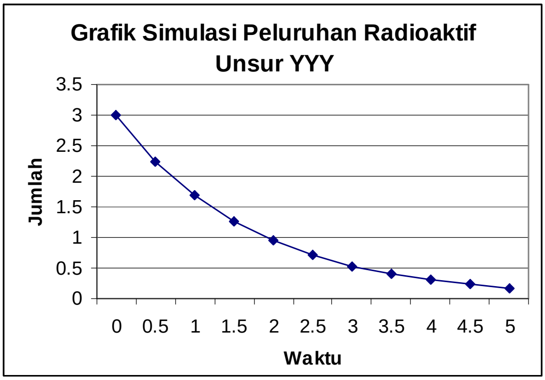
$\Delta t = 0.5$

$(t_o,y_o) = (0,3)$

$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$

Hasil Simulasi :

t_i	y_i	$f(t_i,y_i)$
0	3.00	-1.50
0.5	2.25	-1.13
1	1.69	-0.84
1.5	1.27	-0.63
2	0.95	-0.47
2.5	0.71	-0.36
3	0.53	-0.27
3.5	0.40	-0.20



4	0.30	-0.15
4.5	0.23	-0.11
5	0.17	

B. Model Hukum Pendinginan Newton

Hukum ini menyatakan bahwa temperatur dari obyek akan menurun sebanding dengan beda antara temperatur obyek dengan temperatur sekelilingnya. Laju perubahan temperatur pada sembarang waktu di modelkan dengan :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$$

dimana T(t) = temperatur dari obyek pendingin yang diletakkan dalam suatu medium dengan temperatur tetap T_1 dan *k* adalah konstanta perbandingan.

Jika sebuah bola tembaga dipanaskan sampai temperatur 100^oC dan kemudian pada saat *t* = 0 (menit ke 0) bola itu di rendam dalam air yang bertemperatur tetap 30^oC. Simulasikan dengan metode Euler untuk mengetahui kapan bola tembaga tersebut akan bertemperatur 30^oC, bila diketahui *k* = 0.15 dan pengamatan temperatur dilakukan setiap 5 menit.

Misal permasalahan di atas akan diselesaikan dengan metode Euler.

$f(t_i,T_i) = -k(T_i - T_1) = -0.15(T_i - 30)$; $T_1=30$

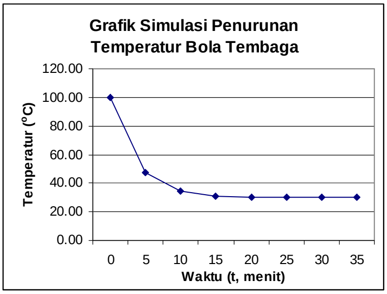
$\Delta t = 5$

$(t_o,T_o) = (0,100)$

$$T_{i+1} = T_i + f(t_i,T_i)\Delta t$$

Hasil Simulasi :

t_i	T_i	$f(t_i,T_i)$
0	100.00	-10.50
5	47.50	-2.63
10	34.38	-0.66
15	31.09	-0.16



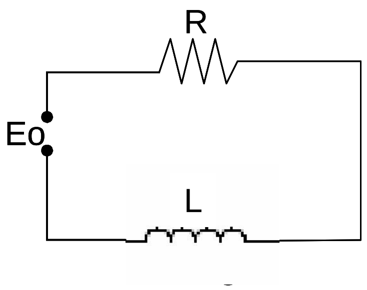
20	30.27	-0.04
25	30.07	-0.01
30	30.02	0.00
35	30.00	0.00

Jadi bola tembaga akan mempunyai temperatur 30^{o}C setelah 35 menit.

C. Model Rangkaian RL

Menurut hukum tegangan Kierchoff, model rangkaian RL untuk gaya elektromotif konstan diberikan oleh persamaan diferensial :

$$L\frac{dI}{dt} + RI = Eo$$



dimana L = konstanta induktansi dari induktor (henry), I = arus (ampere), R = konstanta resistor (ohm) dan Eo = konstanta beda tegangan pada waktu t (volt). Simulasikan nilai-nilai I dari saat t = 0 hingga t = 0.2 dengan perubahan pengamatan setiap 0.02, bila diketahui R = 100 ohm, L = 2.5 henry, dan Eo = 110 volt.

Misal permasalahan di atas akan diselesaikan dengan metode Heun.

$$L\frac{dI}{dt} = Eo - RI$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}(Eo - RI)$$

$f(t, I) = \frac{1}{L}(Eo - RI) = (110 - 100I)/2.5$

$\Delta t = 0.02$ dan $(t_i, I_i) = (0,0)$.

$t_o = 0 \rightarrow \quad I_o = 0$

$I_0^{'} = f(t_0, I_0) = (110 - 100 * 0)/2.5 = 44$

$I_1^0 = I_0 + f(t_0, I_0)\Delta t = 0 + (44)(0.02) = 0.880$

$I_1^{'} = f(t_1, I_1^0) = f(0.02, 0.880) = (110 - 100 * 0.880)/2.5 = 8.800$

$\overline{I'} = \frac{I_0^{'} + I_1^{'}}{2} = \frac{44 + 8.800}{2} = \frac{52.800}{2} = 26.400$

$I_1 = I_0 + \overline{I'}\Delta t = 0 + (26.400)(0.02) = 0.528$

dan seterusnya, sehingga diperoleh nilai-nilai pada tabel berikut :

t_i	I_i	$I_i^{'}$	I_{i+1}^0	$I_{i+1}^{'}$	$\overline{I'}$
0.00	0.000	44.000	0.880	8.800	26.400
0.02	0.528	22.880	0.986	4.576	13.728
0.04	0.803	11.898	1.041	2.380	7.139
0.06	0.945	6.187	1.069	1.237	3.712
0.08	1.020	3.217	1.084	0.643	1.930
0.10	1.058	1.673	1.092	0.335	1.004
0.12	1.078	0.870	1.096	0.174	0.522
0.14	1.089	0.452	1.098	0.090	0.271
0.16	1.094	0.235	1.099	0.047	0.141
0.18	1.097	0.122	1.099	0.024	0.073
0.20	1.098	0.064	1.100	0.013	0.038