RUANG EIGEN

Masalah nilai dan vektor eigen banyak sekali dijumpai dalam bidang rekayasa, seperti maslah kestabilan sistem, optimasi dengan SVD, kompresi pada pengolahan citra, dan lain-lain. Untuk lebih memahami masalah nilai dan vektor eigen, pada bab ini akan dijelaskan melalui definisinya dan beberapa contoh yang terkait, sampai pada basis ruang eigen dari suatu matriks. Pada bagian akhir, untuk menambah wawasan dari aplikasi nilai dan vektor eigen buku ini akan memaparkan tentang aplikasi nilai dan vektor eigen pada penentuan solusi sistem persamaan diferensial.

8.1 NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Sebelum kita melangkah lebih jauh, kita awali pembahasan materi bab ini dengan pemahaman defnisi dari nilai dan vektor eigen suatu matriks. Misalkan sebuah matriks A_{nxn} dan $\bar{v}$ adalah vektor tak nol di R^n dan skalar λ merupakan skalar Rill sehingga memenuhi :

$$A\bar{v} = \lambda \bar{v} \tag{8.1}$$

maka λ dinamakan **nilai eigen**, sedangkan $\bar{v}$ dinamakan **vektor eigen**.

Contoh 8.1 :

Perhatikan perkalian matriks berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skalar 5 dan vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, masing-nasing dinamakan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A

Perhatikan bahwa : $A\bar{v} = \lambda \bar{v}$

$$\leftrightarrow \; A\bar{v} - \lambda \bar{v} = \bar{0}$$

$$\leftrightarrow \; A\bar{v} - \lambda I \,\bar{v} = \bar{0},$$

dimana I_{nxn} merupakan matriks identitas.

$$\leftrightarrow \; (A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0} \qquad (8.2)$$

Dengan mengingat kembali pembahasan tentang SPL homogen, maka SPL (8.2) akan mempunyai solusi tunggal ($\bar{v}$ adalah vektor nol) jika dan hanya jika *det* (A – λI) ≠ 0. Karena menurut definisi, vektor $\bar{v}$ merupakan vektor tak nol, maka kondisi ini akan dipenuhi *jika dan hanya jika* $\det(A - \lambda I) = 0$. Dengan demikian, kita bisa mengetahui nilai eigen dari suatu matriks A, yakni skalar (λ) yang memenuhi :

$$\det(A - \lambda I) = 0. \qquad (8.3)$$

Selanjutnya, persamaan ini dinamakan **persamaan karakteristik**. Jadi, nilai eigen merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut.

Contoh 8.2 :

Tentukan nilai eigen dari matriks :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Akan ditentukan nilai eigen, yakni saat *det* (A – λI) = 0

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan ekspansi kopaktor sepanjang kolom ke-2

$$(1-\lambda)\ ((1-\lambda)(-\lambda) \ - 2) = 0$$
$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$
$$(1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Jadi, matriks A memiliki tiga buah nilai eigen yaitu :

$\lambda = -1$, $\lambda = 1$, dan $\lambda = 2$.

Jangan dilupakan, bahwa inti dari pencarian nilai eigen adalah mencari akar dari persamaan karakteristik *det* $(A - \lambda I) \neq 0$. Kadang-kadang mahasiswa terjebak untuk membentuk persamaan tersebut menjadi polinom orde tinggi, selanjutnya mereka kesusahan dalam mencari akar persamaan polinom tersebut.

Contoh 8.3 :

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Nilai eigen dari A dapat diperoleh saat *det* $(\lambda I - A) = 0$

$$Det \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} = 0$$

Dengan ekspansi kofaktork sepanjang baris pertama :

$$(\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda - 2)((\lambda - 2)^2 - 1) + (-\lambda + 1) - (1 + (\lambda - 2)) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) - (\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) = 0$

$(\lambda - 1)((\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$

$(\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$

Nilai Eigen dari matriks tersebut adalah 1 dan 4.

Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan operasi baris elementer, mariks yang diperbesar dari SPL homogen menjadi :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Misal s dan t adalah parameter, solusi SPL homogen tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$ adalah :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untuk λ = 4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan operasi baris elementer, mariks yang diperbesar dari SPL homogen menjadi :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Misal s adalah parameter, solusi SPL homogen tersebut adalah:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ = 4 adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan suatu nilai eigen λ merupakan vektor tak nol dalam ruang solusi dari SPL $(\lambda I - A)\bar{v} = \bar{0}$. Ruang solusi ini dinamakan **ruang eigen** dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Dengan demikian, basis dari ruang eigen matriks A dapat dinyatakan sebagai berikut :

Basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ = 1 adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sementara itu , basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ = 4 adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8.2 DIAGONALISASI

Suatu matriks kuadrat A_{nxn} dikatakan **dapat didiagonalkan (diagonalizable)** jika terdapat matriks P yang mempunyai invers sehingga $\mathbf{P^{-1}AP}$ merupakan matriks diagonal. Matriks P dinamakan matriks yang mendiagonalkan matriks A. Perlu diperhatikan bahwa vektor-vektor kolom pada mtriks P merupakan vektor – vektor eigen dari matriks A. Karena P memiliki invers berarti *det* (A) ≠ 0. Ini menunjukan bahwa vektor-vektor eigen tersebut saling bebas linear. Dengan demikian diperoleh kesimpulan bahwa :

"A dapat didiagonalkan *jika dan hanya* jika A_{nxn} memiliki n buah vektor eigen yang bebas linear"

Misal A_{nxn}, cara menentukan P :

- Tentukan nilai eigen
- Tentukan n vektor eigen yang bebas linear, $p_1, p_2, \dots p_n$
- Bentuk matriks P dimana vektor-vektor kolomnya adalah

  vektor-vektor $p_1, p_2, \dots p_n$

Contoh 8.4 :

Tentukan apakah

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dapat didiagonalkan ? Jika ya, tentukan matriks pendiagonal P dan matrix diagonal D !

Jawab :

Seperti telah dijelaskan pada contoh sebelumnya bahwa :
Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$ adalah :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sementara itu, vektor eigen yang bersesuaian dengan n.e. $\lambda = 4$ adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sehingga diperoleh :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena *det* (P) = – 1 ≠ 0. Ini menunjukan bahwa vektor-vektor eigen tersebut saling bebas linear. Dengan argument tersebut disimpulkan bahwa A dapat didiagonalkan.
Sementara itu, matriks diagonalnya berbentuk :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal $\mathbf{D = P^{-1}AP}$, unsur diagonalnya merupakan nilai – nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor – vektor eigen $p_1, p_2, \ldots p_n$. Perlu diketahui bahwa jika A_{nxn}, mempunyai n buah nilai eigen yang berbeda maka A dapat didiagonalisasi.

Contoh 8.5 :

Tentukan matriks yang mendiagonalkan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah :

$$|\lambda.I - A| = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} (\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1) & -1 \\ 0 & -1 & (\lambda - 1) \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor :

Pilih Baris I

$$\det \{\lambda.I - A\} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$
$$= (\lambda - 1)\,(\lambda)\,(\lambda - 2) + 0 + 0$$
$$= (\lambda - 1)\,(\lambda)\,(\lambda - 2)$$

Diperoleh : $\lambda = 0$; $\lambda = 1$; $\lambda = 2$

Untuk $\lambda = 0$

$$(\lambda.I - A)\,\bar{v} = \bar{0}$$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi

$$x_1 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 0$$
$$x_2 = -x_3$$

Dengan demikian, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t,$$ dimana t adalah parameter

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah :

$$\overline{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

$$(\lambda.I - A)\,\overline{v} = \overline{0}$$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = t$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t,$$

dimana t adalah parameter.

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah :

$$\overline{P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$

$$(\lambda.I - A)\,\overline{v} = \overline{0}$$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 = x_3$$

$$x_2 = t$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\ ,$$

dimana t adalah parameter

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah

$$\overline{P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pandang $k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 = \overline{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Perhatikan OBE berikut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi $\{\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}\}$ merupakan himpunan yang bebas linear

Dengan demikian matriks yang mendiagonalkan A adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pada pembahasan berikutnya adalah masalah diagonalisasi dari suatu matriks simetri. Namun sebelumnya kita perlu tahu beberapa definisi tentang matriks ortogonal. Suatu matriks B_{nxn} dikatakan matriks ortogonal **jika** invers dari matriks tersebut sama dengan transpose dari matriks yang bersangkutan (**$B^{-1} = B^t$**). Untuk memahami sifat dari suatu matriks ortogonal, perhatikan bahwa pernyataan berikut adalah ekivalen satu sama lain :

a. B_{nxn} adalah matriks ortogonal
b. Vektor-vektor baris dari B membentuk himpunan ortonormal di R^n dalam RHD Euclides.
c. Vektor-vektor kolom dari B membentuk himpunan ortonormal di R^n dalam RHD Euclides.

Suatu matriks A_{nxn} dikatakan dapat didiagonalkan secara ortogonal jika terdapat **matriks ortogonal** P sedemikian hingga **$P^{-1}AP$** (dengan kata lain **P^tAP**) merupakan matriks diagonal. Sebagai ilustrasi, kita dapat melihat gambaran tentang matriks yang didiagonalkan secara ortogonal, sebagai berikut :

$$D = P^{-1}AP \tag{8.4}$$

atau

$$PDP^{-1} = A \tag{8.5}$$

Karena P merupakan matriks ortogonal, maka pernyataan diatas dapat ditulis menjadi :

$$A = PDP^t \tag{8.6}$$

Sehingga diperoleh hubungan

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t DP^t = PDP^t = A \tag{8.7}$$

Dengan demikian, suatu matriks bujur sangkar A dikatakan dapat didiagonalkan secara ortogonal jika dan hanya jika matriks A tersebut merupakan matriks simetri. Masalahnya, kita tak dapat serta merta menebak suatu matriks ortogonal yang memenuhi definisi diatas. Berikut ini adalah langkah-langkah menentukan matriks ortogonal yang mendiagonalkan secara ortogonal suatu matriks kuadrat.

Misal A_{nxn}, cara menentukan P :

a. Tentukan nilai eigen
b. Tentukan basis ruang eigen untuk setiap nilai eigen yang diperoleh
c. Gunakan proses Gram Schmidt untuk merubah setiap basis pada (b) menjadi basis ruang eigen yang ortonormal.
d. Bentuk matriks P dimana vektor-vektor kolomnya berupa basis ruang eigen yang ortonormal.

Contoh 8.6 :

Tentukan matriks yang mendiagonalkan secara ortogonal matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Kita mempunyai nilai eigen $\lambda = 0$; $\lambda = 1$; $\lambda = 2$

Basis ruang eigen :

- Untuk $\lambda = 0$ adalah $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
- Untuk $\lambda = 1$ adalah $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- Untuk $\lambda = 2$ adalah $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dengan demikian basis ruang eigen yang ortonormal dari matriks diatas secara berturutan adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Dengan demikian matriks yang mendiagonalkan A secara ortogonal adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

8.3 SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR

Pada kuliah ini, sistem persamaan diferensial yang akan dibahas hanya sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan koefisien konstan.

Misalkan,

$$\frac{dy(t)}{dt} = a\, y(t) \tag{8.8}$$

merupakan persamaan diferensial orde 1 dengan koefisien konstan. Solusi dari persamaan diferensial tersebut berbentuk $y(t) = ce^{at}$ dimana c merupakan suatu konstanta yang bergantung pada kondisi awal tertentu. Masalah sistem persamaan yang dilengkapi dengan sutu kondisi awal tertentu dinamakan **masalah nilai awal**. Jika kondisi awal dari persamaan diferensial tersebut adalah $y(0) = 2$ maka solusi dari sistem persamaan diferensial (1) adalah

$$y(t) = \tfrac{1}{2}e^{at}$$

Berikut ini merupakan bentuk umum dari sistem persamaan diferensial orde satu dengan koefisien konstan yang terdiri dari n persamaan dan n buah peubah.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x_1)}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \\
\frac{d(x_2)}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\frac{d(x_n)}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Sistem persamaan diferensial tersebut dapat di tulis dalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

atau

$$X' = AX \tag{8.11}$$

Contoh 8.7 :

Tuliskan sistem persamaan diferensial berikut dalam bentuk perkalian matriks :

$$\frac{dr_1(t)}{dt} = 2r_1(t)$$
$$\frac{dr_2(t)}{dt} = -3r_2(t)$$
$$\frac{dr_3(t)}{dt} = r_3(t)$$

Tentukan solusinya jika sistem tersebut mempunyai nilai awal $r_1(0) = 1 \quad r_2(0) = 2$, dan $r_3(0) = 3$!

Jawab :

Sistem persamaan diferensial tersebut berbentuk :

$$\begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga solusi sistem tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{-3t} \\ 3e^{t} \end{bmatrix}$$

Masalahnya, suatu sistem persamaan diferensial **tidak selalu** memberikan matriks koefisien yang berbentuk matriks diagonal. Misalkan,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{n1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

merupakan matriks yang dapat mendiagonalkan matriks koefisien dari suatu sistem persamaan diferensial A, sehingga $D = P^{-1}AP$ berbentuk matriks diagonal.

Tulis :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{n1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

atau

$$X = PU \tag{8.13}$$

dimana U merupakan suatu matriks yang berisi fungsi syang bergatung pada *t*. Dengan mendiferensialkan setiap persamaan pada sistem (8.13) diperoleh :

$$X' = PU' \tag{8.14}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (8.13) pada persamaan (8.11) maka :

$$PU' = A(PU) \tag{8.15}$$

Karena *P* merupakan matriks yang mendiagonalkan *A*, ini berarti *P* memiliki invers. Oleh karena itu pernyataan diatas dapat ditulis dalam bentuk :

$$U' = P^{-1}APU \tag{8.16}$$

atau

$$U' = DU \tag{8.17}$$

D merupakan matriks diagonal, dengan demikian solusi untuk *U* dapat diperoleh. Dengan kembali mensubstitusikan solusi *U* pada (8.13), sehingga menjadi :

$$X = PU$$

Langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial :

1. Menentukan nilai eigen dari matriks koefisien *A*.
2. Menentukan matriks P yang mendiagonalkan *A*.
3. Tulis sistem persamaan diferensial yang baru dalam bentuk $U' = DU$ dimana $D = P^{-1}AP$.
4. Tentukan solusi sistem persamaan diferensial $U' = DU$.
5. Tentukan solusi X yang diperoleh dari sistem persamaan $X = PU$

Contoh 8.8 :

Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

Jawab :

Sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Tulis

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)\,(\lambda - 1) - (-1)(2) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)\,(\lambda - 2) = 0$$

Nilai eigen dari A adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 3$.

Basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ adalah $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 2$ adalah $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Dengan demikian diperoleh matriks :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

yang mendiagonalkan *A*, sehingga diperoleh :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial yang baru yaitu :

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dengan solusi $u_1 = c_1 e^{3t}$ dan $u_2 = c_2 e^{2t}$.

Dengan demikian solusi dari sistem persamaan diferensial kita adalah :

$$X = PU$$

atau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

atau

$$x_1 = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$
$$x_2 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

Contoh 8.9 :

Tentukan solusi dari masalah nilai awal :

$$\frac{dp}{dt} = 2p(t) + q(t)$$
$$\frac{dq}{dt} = p(t) + 2q(t)$$

dengan kondisi awal $p(0) = 1$ dan $q(0) = 3$.

Jawab :

Kita punya $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Karena

$$(\lambda.I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & (\lambda - 2) \end{pmatrix}$$

Maka

$$det\ \{\lambda.I - A\} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & (\lambda - 2) \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = (\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 1$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Akhirnya diperoleh

$$\lambda = 1\ ;\ \lambda = 3$$

Untuk $\lambda = 1$

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

$$x_2 = t$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t\ ,$$

dimana t merupakan parameter.

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan λ=1 adalah $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Untuk $\lambda = 3$

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

$$x_2 = t$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\,,$$

dimana t merupakan parameter

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sehingga Solusi Umum dari sstem persamaan diferensial U′ = D U adalah

$$U = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Dengan demikian solusi dari sistem persamaan diferensial kita adalah :

$$X = PU$$

atau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

sehingga

$$x_1 = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

$$x_2 = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

Untuk $t = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 + C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix}$$

Dengan Eliminasi didapat $C_1 = 1$; $C_2 = 2$

Jadi solusi masalah nilai awal tersebut adalah :

$$p(t) = 2e^{3t} - e^{t}$$

$$q(t) = 2e^{3t} + e^{t}$$

Latihan Bab 8

1. Tentukan basis ruang eigen dari $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Apakah $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dapat didiagonalkan, jelaskan!

3. Misal $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Apakah A dapat didiagonalkan ?
   (jelaskan)
   Jika YA, tentukan matriks pendiagonal (P) dan matriks diagonal (D)

4. Suatu Matriks A_{2x2} memiliki Basis Ruang Eigen $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ yang secara berturutan bersesuaian dengan $\lambda = -3$ dan $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ bersesuian dengan $\lambda = 1$. Tentukan matriks A

5. Suatu operator linear di $\Re^3$ didefinisikan oleh

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ b + c \\ b + 2c \end{pmatrix}$$

Jika A merupakan matriks transformasi dari operator linear tersebut dan α adalah nilai eigen dari A. Tentukan basis kernel dari transformasi yang didefinisikan oleh matriks transformasi $(\alpha I - A^2)$ untuk setiap α

6. Tentukan solusi dari masalah nilai awal :

$$\frac{dp}{dt} = 2p(t) + q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = p(t) + 2q(t)$$

dengan kondisi awal $p(0) = 1$ dan $q(0) = 3$.

7. Misalkan aliran TCP yang melewati suatu router didefinisikan oleh :

$$\frac{dw}{dt} = -14\, w(t) + 10\, q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = -5\, w(t) + q(t)$$

dimana w = rata-rata ukuran *window TCP* (paket) dan q = rata-rata panjang antrian pada *bottleneck router* (paket). Jika pada saat t = 0, ukuran window TCP yang dikirim adalah 60 paket dan panjang antrian pada *bottleneck router* adalah 100 paket. Tentukan rata-rata panjang antrian pada *bottleneck router* untuk setiap waktu (t)