RUANG VEKTOR

Ruang Vektor Umum

Misalkan $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ dan $k, l \in Riil$

V dinamakan **ruang vektor** jika terpenuhi aksioma :

1. V tertutup terhadap operasi penjumlahan

   Untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in V$

2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

4. Terdapat $\bar{0} \in V$ sehingga untuk setiap $\bar{u} \in V$

   berlaku $\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

5. Untuk setiap $\bar{u} \in V$ terdapat $(-\bar{u})$ sehingga

   $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$

6. V tertutup thd operasi perkalian dengan skalar.

Untuk setiap $\overline{u} \in V$ dan $k \in Riil$ maka $k\overline{u} \in V$

7. $k\left(\overline{u}+\overline{v}\right)=k\overline{u}+k\overline{v}$

8. $\left(k+l\right)\overline{u}=k\overline{u}+l\overline{u}$

9. $k\left(l\,\overline{u}\right)=l\left(k\,\overline{u}\right)=\left(kl\right)\overline{u}$

10. $1.\overline{u}=\overline{u}$

Contoh :

1. Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).

   Notasi : R^n (Ruang Euclides orde n)

2. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar),

   Notasi : M_{mxn} (Ruang Matriks mxn)

3. Himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.

   Notasi : P_n (Ruang Polinom orde n)

Ruang Euclides orde *n*

Operasi-Operasi pada ruang vektor Euclides:

- Penjumlahan

$$\overline{u}+\overline{v}=\left(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n\right)$$

- Perkalian dengan skalar Riil sebarang (k)

$$k\overline{u}=\left(ku_1,ku_2,\ldots,ku_n\right)$$

- Perkalian Titik (*Euclidean inner product*)

$$\overline{u}\bullet\overline{v}=u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n$$

- Panjang vektor didefinisikan oleh :

$$\|\overline{u}\|=(\overline{u}\bullet\overline{u})^{1/2}=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+\ldots+u_n^{\,2}}$$

- Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh :

$$d\left(\overline{u},\overline{v}\right)=\|\overline{u}-\overline{v}\|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\ldots+(u_n-v_n)^2}$$

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (1,\ 1,\ 2,\ 3)$ dan $\bar{v} = (2,\ 2,\ 1,\ 1)$

Tentukan panjang vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut

Jawab:

Panjang vektor :

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Jarak kedua vektor

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{7}$$

Misalkan W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V

W dinamakan **subruang** (*subspace*) V

jika W juga merupakan ruang vektor

yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar.

Syarat W disebut subruang dari V adalah :

1. $W \neq \{\}$
2. $W \subseteq V$
3. Jika $\overline{u}, \overline{v} \in W$ maka $\overline{u} + \overline{v} \in W$
4. Jika $\overline{u} \in W$ dan $k \in$ Riil maka $k\overline{u} \in W$

Contoh :

Tunjukan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2x2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2x2

Jawab :

1. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ maka $W \neq \{\ \}$
2. Jelas bahwa $W \subset M2x2$
3. Ambil sembarang matriks $A, B \in W$

   Tulis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa $A + B \in W$

4. Ambil sembarang matriks $A \in$ W dan $k \in$ Riil maka

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Ini menunjukan bahwa $kA \in W$

Jadi, W merupakan Subruang dari M2x2.

Contoh :

Periksa apakah himpunan D yang berisi semua matriks orde 2x2 yang determinannya nol merupakan subruang dari ruang vektor M2x2

Jawab :

Ambil sembarang matriks A, B $\in$ W

Pilih $a \neq b$:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, jelas bahwa *det* (A) = 0

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, jelas bahwa *det* (A) = 0

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Karena $a \neq$ b

Maka $det\,(A + B) = a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi D bukan merupakan subruang
karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

Sebuah vektor $\overline{u}$

dinamakan **kombinasi linear** dari vektor – vektor

$\overline{v}_1, \ \overline{v}_2, \ \dots, \overline{v}_n$

jika vektor – vektor tersebut

dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\overline{u} = k_1\overline{v}_1 + k_2\overline{v}_2 + \ \dots \ + k_n\overline{v}_n$$

dimana k_1, k_2, …, k_n adalah skalar Riil.

Contoh

Misal $\overline{u}$ = (2, 4, 0), dan $\overline{v}$ = (1, −1, 3)

adalah vektor-vektor di R^3.

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas

a. $\overline{a}$ = (4, 2, 6)

b. $\overline{b}$ = (1, 5, 6)

c. $\overline{c}$ = (0, 0, 0)

Jawab :

a. Tulis $k_1\overline{u} + k_2\overline{v} = \overline{a}$

akan diperiksa apakah ada k_1, k_2, sehingga kesamaan tersebut dipenuhi.

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE, diperoleh:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & \tfrac{1}{2} & 2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \tfrac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan demikian,

$\overline{a}$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$

atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

b. Tulis :

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat kita peroleh :

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa SPL tersebut adalah tidak konsisten
(tidak mempunyaisolusi).

Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi

➔ **b** tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari **u** dan **v**

c. Dengan memilih $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$,

maka dapat ditulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{c}$$

artinya vektor nol merupakan kombinasi linear

dari vektor apapun.

Definisi membangun dan bebas linear

Himpunan vektor

$$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$$

dikatakan **membangun** suatu ruang vektor V jika setiap vektor pada V selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor – vektor di S.

Contoh :

Tentukan apakah

$\bar{v}_1 = (1, 1, 2)$,

$\bar{v}_2 = (1, 0, 1)$, dan

$\bar{v}_3 = (2, 1, 3)$ membangun V?

Jawab :

Ambil sembarang vektor di R^2

misalkan

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Tulis :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Syarat agar dapat dikatakan kombinasi linear

SPL tersebut harus mempunyai solusi (konsisten)

Dengan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & u1 \\ 0 & -1 & -1 & u2 - u1 \\ 0 & 0 & 0 & u3 - u1 - u2 \end{bmatrix}$$

Agar SPL itu konsisten **haruslah** $u_3 - u_2 - u_1 = 0$

Ini kontradiksi dengan pengambilan vektor sembarang (unsur – unsurnya bebas, tak bersyarat)

Dengan demikian vektor – vektor tersebut **tidak membangun** R^3

Misalkan $S = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$

adalah himpunan vektor diruang vektor V

S dikatakan **bebas linear** (*linearly independent*)

JIKA SPL homogen :

$$k_1\overline{u}_1 + k_2\overline{u}_1 + ... + k_n\overline{u}_n = \overline{0}$$

hanya mempunyai satu solusi (tunggal), yakni

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, ..., \quad k_n = 0$$

Jika solusinya tidak tunggal

maka S kita namakan himpunan tak bebas linear

(Bergantung linear / *linearly dependent*)

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (-1,\ 3,\ 2)$ dan $\bar{a} = (1,\ 1,\ -1)$

Apakah saling bebas linear di R^3

Jawab :

Tulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu :

$k_1 = 0$, dan $k_2 = 0$.

Ini berarti ū dan ā adalah saling bebas linear.

Contoh :

Misalkan

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear R^3

Jawab :

Tulis :

$$\bar{0} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 mrp solusi tak hingga banyak

Jadi

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear.

Basis dan Dimensi

Jika V adalah sembarang ruang vektor

dan $S = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots , \bar{u}_n \}$ merupakan

himpunan berhingga dari vektor – vektor di V,

maka ***S*** **dinamakan basis bagi** ***V***

Jika kedua syarat berikut dipenuhi :

- S membangun V
- S bebas linear

Contoh :

Tunjukan bahwa himpunan matriks berikut :

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

merupakan basis bagi matriks berukuran 2 x 2

Jawab :

Tulis kombinasi linear :

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} 3k_1 + k_4 & 6k_1 - k_2 - 8k_3 \\ 3k_1 - k_2 - 12k_3 - k_4 & -6k_1 - 4k_3 + 2k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dengan menyamakan setiap unsur pada kedua matriks, diperoleh SPL :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Determinan matriks koefisiennya (MK) = 48

- *det*(MK) $\neq 0$ ➔ SPL memiliki solusi

  untuk setiap a,b,c,d

  Jadi, M membangun M2 x 2

- Ketika $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$,

  det(MK) $\neq 0$ ➔SPL homogen punya solusi tunggal.

  Jadi, M bebas linear.

Karena M bebas linear dan membangun $M_{2 \times 2}$
maka M merupakan basis bagi $M_{2 \times 2}$.
Ingat…
Basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal.

Contoh :

Untuk ruang vektor dari $M_{2 \times 2}$, himpunan matriks :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

juga merupakan basisnya.

Misalkan matriks :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor baris

Vektor kolom

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE matriks A mempunyai **basis ruang kolom** yaitu :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

basis ruang baris diperoleh dengan cara,

Mentransposkan terlebih dahulu matriks *A*,

lakukan OBE pada A^t, sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom-kolom pada matriks hasil OBE yang memiliki satu utama berseseuaian dengan matriks asal (A).

Ini berarti,

matriks A tersebut mempunyai **basis ruang baris** :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimensi basis ruang baris = ruang kolom dinamakan **rank**.

Jadi rank dari matriks A adalah 2.

Contoh :

Diberikan SPL homogen :

$$\begin{aligned} 2p + q - 2r - 2s &= 0 \\ p - q + 2r - s &= 0 \\ -p + 2q - 4r + s &= 0 \\ 3p - 3s &= 0 \end{aligned}$$

Tentukan basis ruang solusi dari SPL diatas

Jawab :

SPL dapat ditulis dalam bentuk :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solusi SPL homogen tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b$$

dimana a, b merupakan parameter.

Jadi, basis ruang solusi dari SPL diatas adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimensi dari basis ruang solusi dinamakan **nulitas.**

Dengan demikian, nulitas dari SPL diatas adalah 2.

Latihan Bab 5

1. Nyatakanlah matriks $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

sebagai kombinasi linear dari matriks berikut :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. Periksa, apakah himpunan berikut bebas linear !

   a. $\{6 - x^2 , 6 + x + 4x^2 \}$

   b. $\{1 + 3x + 3x^2, \; x + 4x^2, \; 5 + 6x + 3x^2, \; 7 + 2x - x^2\}$

3. Periksa, apakah himpunan $A = \{6 - x2 , 6 + x + 4x2 \}$ membangun polinom orde 2 !

4. Periksa, apakah himpunan berikut merupakan basis bagi polinom orde 2 (P2)

   a. $\{4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2\}$

   b. $\{-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2\}$

5. Misalkan

$$J = \left\{ a + bx + cx^2 \;\middle|\; a^2 = b^2 + c^2 \right\}$$

   merupakan himpunan bagian dari ruang vektor Polinom orde dua.

   Periksa apakah J merupakan subruang dari ruang vektor Polinom orde dua

   Jika ya, tentukan basisnya

6. Diberikan SPL homogen :

$$p + 2q + 3r = 0$$

$$p + 2q - 3r = 0$$

$$p + 2q + 3r = 0,$$

Tentukan basis ruang solusi (buktikan) dan tentukan dimensinya.

7. Tentukan *rank* dari matriks :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$