Pertemuan ke-1
PENDAHULUAN

1.1. PENGANTAR RISET OPERASI

Sejak revolusi industri, dunia usaha mengalami perubahan dalam hal ukuran (besarnya) dan kompleksitas organisasi-organisasi perusahaan. Bagian yang mengalami perubahan yang cukup menyolok adalah perkembangan dalam pembagian kerja dan segmentasi tanggung jawab manajemen dalam organisasi-organisasi tersebut. Disisi lain, organisasi-organisasi (perusahaan) pada saat ini harus beroperasi di dalam situasi dan kondisi lingkungan bisnis yang dinamis dan selalu bergejolak, serta siap untuk berubah-ubah. Perubahan-perubahan tersebut terjadi sebagai akibat dari kemajuan teknologi yang begitu pesat ditambah dengan dampak dari beberapa faktor-faktor lingkungan lainnya seperti keadaan ekonomi, politik, sosial dan sebagainya. Perkembangan Kemajuan teknologi tersebut telah menghasilkan dunia kompeterisasi. Buah-buah pembangunan telah melahirkan para pimpinan dan pengambilan keputusan, para peneliti, perencana dan pendidik untuk memikirkan serta memcahkan/menganalisis permasalahan, mengambil langkah-langkah dan strategi yang tepat serta target yang sesuai secara sistematis dalam rangka mencapai tujuan yang telah ditentukan, yakni hasil yang memuaskan. Hasil yang memuaskan tersebut adalah hasil yang optimal yang berarti dampak positipnya maksimum dan dampak negatipnya minimum. Pola berpikir, pola analisis dan pemecahan masalah, pola pengambilan langkah-langkah, serta pola penyusunan strategi dan target secara sistematis tersebut, disebut sebagai *pola pendekatan ilmiah*.

Arti riset operasi (operations research) telah banyak didefinisikan oleh beberapa ahli. *Morse* dan *Kimball* mendefinisikan riset operasi sebagai metode ilmiah (scientific method) yang memungkinkan para manajer mengambil keputusan mengenai kegiatan yang mereka tangani dengan dasar kuantitatif. Definisi ini kurang tegas karena tidak tercermin perbedaan antara riset operasi dengan disiplin ilmu yang lain. Sedangkan *Churchman, Arkoff* dan *Arnoff* pada tahun 1950-an mengemukakan pengertian riset operasi sebagai aplikasi metode-metode, teknik-teknik dan peralatan-peralatan ilmiah dalam menghadapi masalah-masalah ysng timbul di dalam operasi perusahaan dengan tujuan ditemukannya pemecahan yang optimum masalah-masalah tersebut. Sedangkan *Miller* dan *M.K. Starr* mengartikan riset operasi sebagai peralatan manajemen yang menyatukan ilmu pengetahuan, matematika, dan logika dalam kerangka pemecahan masalah-masalah yang dihadapi sehari-hari, sehingga akhirnya permasalahan tersebut dapat dipecahkan secara optimal.

Dari ketiga definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa riset operasi berkenaan dengan pengambilan keputusan yang optimal dalam, dan penyusunan model dari, sistem-sistem baik yang diterministik maupun probabilistik yang berasal dari kehidupan nyata. Atau dunia pengelolaan atau dunia usaha yang memakai pendekatan ilmiah atau pendekatan sistematis disebut *riset operasi (Operations Resech).*

Akar dari perkembangan riset operasi dapat ditelusuri kembali dalam beberapa dekade, di mana penggunaan pendekatan ilmiah dalam manajemen organisasi dimulai. Bagaimanapun juga, permulaan dari kegiatan yang disebut riset operasi telah dimulai dikembangkan penggunaannya pada permulaan perang dunia kedua. Pada saat itu dirasa perlu untuk mengalokasikan sumber daya-sumber daya yang terbatas dan langka untuk bermacam-macam operasi militer, dan kegiatan-kegiatan dalam setiap operasi harus dilakukan dengan cara efektif untuk memenangkan perang.

Manajemen militer Inggris dan kemudian Amerika mulai "memanggil" para ahli untuk menerapkan pendekatan ilmiah untuk keperluan strategi dan taktik militernya. Karena mereka diminta untuk melakukan riset dalam operasi-operasi (militer), mereka merupakan tim riset operasi yang pertama. Setelah perang dunia kedua berakhir, dengan melihat sukses penggunaan riset operasi dalam militer, kalangan industri menjadi tertarik pada bidang baru ini. Dari waktu ke waktu, kegunaan riset operasi, sebagai peralatan manajemen (*tools of management*), semakin dirasakan oleh perusahaan-perusahaan.

Tim-tim riset operasi dalam lingkungan dunia bisnis ini menandai kemajuan teknik-teknik riset operasi. Sebagai contoh utama adalah metode simpleks untuk pemecahan masalah-masalah linear programming, yang dikembangkan oleh George Dantzig dalam tahun 1947. Disamping itu banyak peralatan-peralatan riset operasi standar, seperti linear programming, dynamic programming, teori antrian dan teori pengendalian persediaan telah dikembangkan sebelum akhir tahun 1950-an.

Linear programming (program linier) merupakan salah satu teknik penyelesaian riset operasi dalam hal ini adalah khusus menyelesaikan masalah-masalah optimasi (memaksimalkan atau meminimumkan) tetapi hanya terbatas pada masalah-masalah yang dapat diubah menjadi fungsi linier. Demikian pula kendala-kendala yang ada juga berbentuk linier.

1.2. LANGKAH-LANGKAH PERUMUSAN MASALAH

Dalam hal ini termasuk menentukan pilihan dari alternatif-alternatif yang ada secara umum meliputi langkah-langkah:

1. *Identifikasi masalah*

   Penentuan dan perumusan tujuan yang jelas dari persoalan dalam sistem model yang dihadapi. Identifikasi perubah yang dipakai sebagai kriteria untuk pengambilan keputusan yang dapat dikendalikan maupun yang tidak dapat dikendalikan.

   Kumpulkan data tentang kendala-kendala yang menjadi syarat ikatan terhadap perubah-perubah dalam fungsi tujuan sistem model yang dipelajari.

2. *Penyusunan model*

   Memilih model yang cocok dan sesuai dengan permasalahannya. Merumuskan segala macam faktor yang terkait di dalam model yang bersangkutan secara simbolik ke dalam rumusan model matematika.

   Menentukan perubah-perubah beserta kaitan-kaitannya satu sama lainnya. Tetapkan fungsi tujuan beserta kendala-kendalanya dengan nilai-nilai dan perameter yang jelas.

3. *Analisa model.*

   Melakukan anlisis terhadap model yang telah disusun dan dipilih.

   Memilih hasil-hasil analisis yang terbaik (optimal).

   Melakukan uji kepekaan dan anlisis post-optimal terhadap hasil-hasil terhadap analisis model.

4. *Pengesahan model.*

   Analisis pengesahan model menyangkut penilaian terhadap model tersebut dengan cara mencocokannya dengan keadaan dan data yang nyata, juga dalam rangka menguji dan mengesahkan asumsi-asumsi yang membentuk model tersebut secara struktural (yaitu perubahnya, hubungan-hubungan fungisionalnya, dan lain-lain).

5. *Implementasi hasil.*

   Hasil-hasil yang diperoleh berupa nilai-nilai yang akan dipakai dalam kriteria pengambilan keputusan merupakan hasil-hasil analisis yang kiranya dapat dipakai dalam perumusan keputusan yang kiranya dapat dipakai dalam perumusan strategi-strategi, target-target, langkah-langkah kebijakan guna disajikan kepada pengambilan keputusan dalam bentuk alternatif-alternatif pilihan.

Salah satu Contoh kasus adalah untuk keperluan pembangunan, pemerintah memerlukan barang-barang modal yang harus diimport dengan menggunakan devisa. Devisa diperoleh melalui ekspor. Bagaimana cara menentukan produksi barang ekspor, khususnya barang-barang pertanian, agar dapat diperoleh jumlah devisa yang maksimum? Dalam menentukan produksi barang-barang ekspor tersebut pemerintah menghadapi beberapa pembatasan misalnya tersedianya tanah yang cocok untuk menanam sejenis tanaman ekspor tertentu, tersedia bibit, tersedianya pupuk, tersedianya air, tersedianya tenaga kerja, besarnya permintaan barang ekspor tersebut, dan lain sebagainya.

Direktur pemasaran suatu perusahaan akan menyangkut suatu jenis barang tertentu (minyak, pupuk, semen, beras, telur, dll) dari beberapa tempat asal (pabrik, pusat produksi) ke beberapa tempat tujuan (pasar, tempat proyek, dll). Di dalam pengangkutan barang tersebut harus diatur sedemikian rupa sehingga jumlah biaya transportasi minimum dengan memperhatikan bahwa suplai barang dari setiap tempat asal terbatas. sedangkan permintaan barang dari setiap tempat tujuan harus memenuhi sejumlah tertentu.


Sebuah harapan tidak
akan pernah mengubah
apapun. Namun,
keputusan bisa mengubah

Pertemuan ke-2
PROGRAM LINIER

2.1. PENDAHULUAN

Persoalan program linier adalah suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel sedemikian rupa sehingga nilai *funsi tujuan* atau *obyektif (obyektive function)* yang linier menjadi optimum (maksimum atau minimum) dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada yaitu pembatasan ini harus dinyatakan dengan ketidaksamaan yang linier *(linear inequalities)*.

Untuk mudahnya perhatikan contoh berikut ini:

Pemilik perusahaan mempunyai dua macam bahan mentah, katakan bahan mentah I dan II yang masing-masing tersedia sebesar 60 dan 48 satuan (kg, m, ton, dll). Dari dua bahan mentah tersebut akan diproduksi 2 macam barang yaitu barang A dan barang B. Baik barang A dan B memerlukan bahan mentah I dan II sebagai inputnya. Perincian penggunaan bahan mentah tersebut adalah sebagai berikut :

1 (satu) satuan barang A memerlukan 4 satuan bahan I dan 2 satuan bahan II. 1 satuan barang B memerlukan 2 satuan bahan I dan 4 satuan bahan II. Apabila barang A dan B dijual, 1 satuan barang A laku Rp.8000,- sedangkan barang B laku Rp.6000,- Berapa besarnya produksi barang A dan B agar penerimaan seluruh hasil penjualan maksimum dengan memperhatikan pembatasan bahwa penggunaan bahan I dan II tidak melebihi 60 satuan dan 48 satuan ? (semua barang laku dijual).

Perumusan Persoalan Program Linier

Misalkan banyaknya barang A dan B yang diproduksi adalah masing-masing X_1 dan X_2 unit. Tentukan banyaknya X_1 dan X_2 sedemikian rupa sehingga :

Memaksimumkan $Z = 8.000\ X_1 + 6.000\ X_2$ (Fungsi Tujuan),

dengan pembatasan (Fungsi Kendala) adalah:

1) $4\ X_1 + 2\ X_2 \leq 60$,
2) $2\ X_1 + 4\ X_2 \leq 48$,

Di mana $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ (artinya X_1 dan X_2 tidak boleh mengambil nilai negatif, paling kecil adalah nol yang disebut *syarat non-negatif / non negativity constraint).*

Suatu persoalan disebut persoalan program linier apabila memenuhi hal-hal sebagai berikut:

1. Tujuan (objective)

Apa yang menjadi tujuan permasalahan yang dihadapi yang ingin dipecahkan dan dicari jalan keluarnya. Tujuan ini harus jelas dan tegas yang disebut *fungsi tujuan (objective function).* Fungsi tujuan tersebut dapat berupa dampak positip, manfaat-manfaat, atau dampak negatip, kerugian-kerugian, resiko-resiko, biaya-biaya, jarak, waktu yang ingin diminimumkan.

2. Alternatif perbandingan.

Harus ada sesuatu atau alternatif yang ingin diperbandingkan, misalnya antara kombinasi waktu tercepat dan biaya tertinggi dengan waktu terlambat dan biaya terendah, atau alternatif padat modal dengan padat karya, proyeksi permintaan tinggi dengan rendah, dan seterusnya.

3. Sumber Daya

Sumber daya yang dianalisis harus berada dalam keadaan terbatas. Misalnya keterbatasan tenaga, bahan mentah terbatas, modal terbatas, ruangan untuk menyimpan barang terbatas, dan lain-lain. Pembatasan harus dalam *ketidaksamaan linier (linier inequality).* Keterbatasan dalam sumber daya tersebut dinamakan sebagai *fungsi kendala* atau *syarat ikatan.*

4. Perumusan Kuantitatif.

Fungsi tujuan dan kendala tersebut harus dapat dirumuskan secara kuantitatif dalam model matematika.

5. Keterikatan Perubah.

Perubah-perubah yang membentuk fungsi tujuan dan fungsi kendala tersebut harus memiliki hubungan keterikatan hubungan keterikatan atau hubungan fungsional.

Pada dasarnya secara umum, persoalan program linier dapat dirumuskan dalam suatu model dasar/model baku/model matematika sebagai berikut:

Menentukan nilai dari X_1, X_2, X_3, ..., X_n sedemikian rupa sehingga:

Optimal (maksimum|minimum) $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_jX_j + \cdots + C_nX_n = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$

Yang kemudian disebut sebagai *Fungsi Tujuan (Objective Function)*

dengan pembatasan (Funsi Kendala/Syarat Ikatan) :

$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \leq \text{atau} \geq b_1$,

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \leq \text{atau} \geq b_2$,

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \leq \text{atau} \geq b_m$,

atau $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq atau \geq b_i$, untuk i = 1,2, …, m

dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$,...,$X_n \geq 0$ atau $X_j \geq 0$, dimana j = 1, 2, 3,...., n *(syarat non-negatif)*.

Keterangan :

Ada n macam barang yang akan diproduksi masing-masing sebanyak X_1, X_2, ...,X_n unit.

X_j = Variabel pengambilan keputusan atau kegiatan yang ingin dicari (misalnya banyaknya produksi barang yang ke-j, dimana j = 1, 2, ...,n).

C_j = Parameter yang dijadikan kriteria optimasi atau koefisien variabel pengambilan keputusan dalam fungsi tujuan (misalnya harga per satuan barang ke-j).

b_i = Sumber daya yang terbatas, yang membatasi kegiatan atau usaha yang bersangkutan disebut juga konstanta atau “nilai sebelah kanan (nsk)" dari kendala ke-i (misalnya banyaknya bahan mentah ke-i, i= 1, 2, .., m). Ada m macam bahan mentah, yang masing-masing tersedia b_1, b_2,...., b_m.

a_{ij} = Koefisien teknologi variabel pengambilan keputusan (kegiatan yang bersangkutan) dalam kendala ke-i (misalnya banyaknya bahan mentah ke-i yang digunakan untuk memproduksi 1 satuan barang ke-j).

Asumsi-asumsi (anggapan-anggapan) dasar dari program linier telah tersirat dalam model baku persoalan program linier, tetapi perlu diuraikan agar dalam penggunaan teknik program linier tersebut dapat memuaskan tanpa terbentur kepada berbagai hal. Adapun asumsi-asumsi dasar tersebut adalah sebagai berikut :

1. *Proportionality*

Asumsi ini berarti bahwa naik turunnya nilai Z dan penggunaan sumber atau fasilitas yang tersedia akan berubah secara *sebanding* (proporsional) dengan perubahan tingkat kegiatan.

Contoh :

a. $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_j X_j + ... + C_n X_n$

Setiap pertambahan 1 unit X_1 akan menaikkan Z dengan C_1 . Setiap pertambahan 1 unit X_2 akan menaikkan Z dengan C_2 , dan seterusnya.

b. $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + ... + a_{1n} X_n \leq b_1$

Setiap pertambahan 1 unit X_1 akan menaikkan penggunaan sumber/fasilitas 1 dengan a_{11} , Setiap pertambahan 1 unit X_2 akan menaikkan penggunaan sumber/fasilitas 1 dengan a_{12} , dan seterusnya. Dengan kata lain, setiap ada kenaikan kapasitas riil tidak perlu ada biaya persiapan (set up cost).

2. *Additivity*

Asumsi ini berarti bahwa nilai tujuan tiap kegiatan tidak saling mempengaruhi, atau dalam program linier dianggap bahwa kenaikan dari nilai tujuan (Z) yang diakibatkan oleh kenaikan suatu kegiatan dapat ditambahkan tanpa mempengaruhi bagian nilai Z yang diperoleh dari kegiatan lain.

Contoh :

$$Z = 3 X_1 + 5 X_2$$

Dimana $X_1 = 10$ dan $X_2 = 2$ sehingga Z = 30 + 10 = 40.

Andaikan X_1 bertambah 1 unit, maka sesuai dengan asumsi pertama, nilai Z menjadi 40 + 3 = 43. Jadi nilai 3 karena kenaikan X_1 dapat langsung ditambahkan pada nilai Z mula-mula tanpa mengurangi bagian Z yang diperoleh dari kegiatan 2 (X_2). Dengan kata lain, tidak ada korelasi antara X_1 dengan X_2 .

3. *Divisibility*

Asumsi ini menyatakan bahwa keluaran (output) yang dihasilkan oleh setiap kegiatan dapat berupa bilangan pecahan. Demikian pula dengan nilai Z yang dihasilkan. Misal : $X_1 = 6{,}5$; Z = 1.000,75.

4. *Deterministic (Certainly)*

Asumsi ini menyatakan bahwa semua parameter yang terdapat dalam model program linier (a_{ij}, b_i , C_j) dapat diperkirakan dengan pasti, meskipun jarang dengan tepat.

Beberapa masalah program linier dapat diselesaikan dengan *Metode Grafis* dan dengan *Metode Simpleks.*

2.2. PENYELESAIAN MASALAH PROGRAM LINIER

2.2.1. Metode Grafis

Penyelesaian masalah program Linier dengan menggunakan metode grafis pada umumnya mengikuti langkah-langkah sebagai berikut :

1. Merumuskan masalah asli menjadi model matematika yang sesuai dengan syarat-syarat yang diperlukan dalam model Program Linier, yaitu mempunyai ***fungsi tujuan***, ***fungsi kendala***, dan ***syarat ikatan non-negatif***.
2. Kendala-kendala yang ada digambar hingga dapat diperoleh *daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala (DMK)/Wilayah Kelayakan)/ daerah fisibel* yang titik-titik sudutnya diketahui dengan jelas.
3. Nilai fungsi sasaran (fungsi tujuan) dihitung di setiap titik sudut daerah penyelesaian.
4. Dipilih nilai yang sesuai dengan fungsi tujuan (kalau memaksimumkan berarti yang nilainya terbesar dan sebaliknya).
5. Jawaban soal asli sudah diperoleh.

Catatan : Metode Grafik efektif digunakan dalam pemecahan masalah program linier yang ber “dimensi” : 2 x n atau m x 2, karena keterbatasan kemampuan suatu grafik dalam “menyampaikan” sesuatu (sebenarnya grafik 3 dimensi dapat digambarkan, tetapi sangat tidak praktis).

Contoh Soal :

“PT. Rakyat Bersatu” menghasilkan 2 macam produk. Baik produk I maupun produk II setiap unit laku Rp. 3000,-. Kedua produk tersebut dalam proses pembuatannya perlu 3 mesin. Produk I perlu 2 jam mesin A, 2 jam mesin B, dan 4 jam mesin C. Produk II perlu 1 jam mesin A, 3 jam mesin B, dan 3 jam mesin C. Tersedia 3 mesin A yang mampu beroperasi 10 jam per mesin per hari, tersedia 6 mesin B yang mampu beroperasi 10 jam per mesin per hari, dan tersedia 9 mesin C yang mampu beroperasi 8 jam per mesin per hari. Berikan saran kepada pimpinan “PT. Rakyat Bersatu” sehingga dapat diperoleh hasil penjualan yang maksimum ! Dan berapa unit produk I dan produk II harus diproduksi ?

Jawab :

*) Merumuskan permasalahan Program Linier ke dalam model Matematika :

Misalkan : Akan diproduksi produk I sejumlah X_1 unit dan produk II akan diproduksi sejumlah X_2 unit.

Maka Fungsi tujuannya adalah :

Mamaksimumkan : $Z = 3000\ X_1 + 3000\ X_2$

	M_A	M_B	M_C	**Harga jual per unit**
Produk I	2 jam	2 jam	4 jam	Rp. 3000,-
Produk II	*1 jam*	*3 jam*	*3 jam*	*Rp. 3000,-*
Jumlah Mesin	3 buah	6 buah	9 buah	Memaksimumkan
Lama Operasi	10 jam/mesin	10 jam/mesin	8 jam/mesin	
Total waktu Operasi	30 jam	60 jam	72 jam	

Keterangan :

Lama operasi adalah dalam jam/hari/mesin.

Total waktu operasi adalah sama dengan jumlah mesin x lama operasi (dalam jam/hari/tipe mesin).

Syarat Ikatan (fungsi Kendala):

$2X_1 + X_2 \leq 30$ ....i)
$2X_1 + 3X_2 \leq 60$ ....ii)
$4X_1 + 3X_2 \leq 72$ ....iii)
dan $X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$ (Syarat Non Negatif).

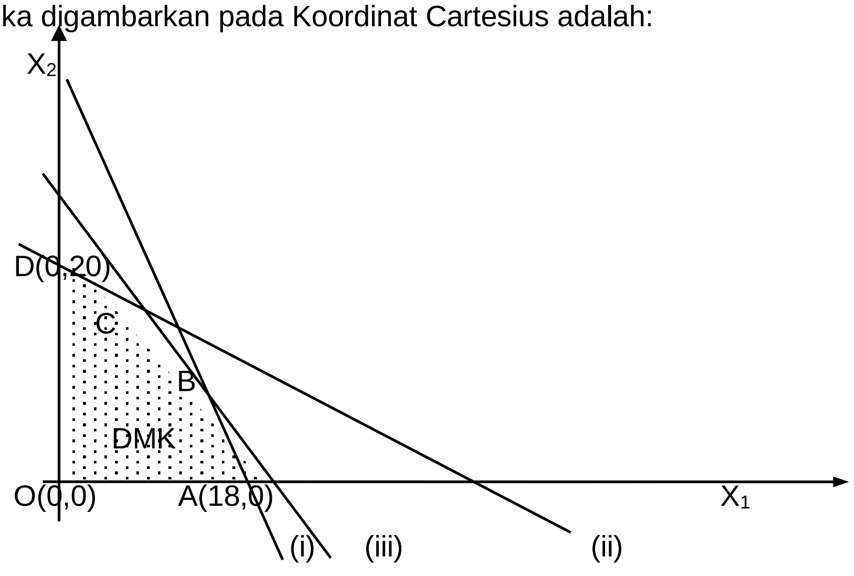
*) Menggambar fungsi-fungsi kendala sehingga diperoleh daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala/Wilayah kelayakan). Titik potong-titik potong dari ketidaksamaan fungsi kendalanya adalah :

Untuk persamaan (i) titik potong dengan sumbu-X_1 jika $X_2 = 0$:
$2X_1 + 0 = 30$ diperoleh $X_1 = 15$ maka titik potongnya adalah **(15,0)**.
Sedangkan titik potong dengan sumbu-X_2 jika $X_1 = 0$:
$0 + X_2 = 30$ diperoleh $X_2 = 30$ maka titik potong adalah **(0,30)**.

Untuk persamaan (ii) titik potong dengan sumbu-X_1 ika $X_2 = 0$:
$2X_1 + 0 = 60$ diperoleh $X_1 = 30$ maka titik potongnya adalah **(30,0)**.
Sedangkan titik potong dengan sumbu-X_2 jika $X_1 = 0$:
$0 + 3X_2 = 60$ diperoleh $X_2 = 20$ maka titik potongnya adalah **(0,20)**.

Untuk persamaaan (iii) titik potong dengan sumbu-X_1 jika $X_2 = 0$:
$4X_1 + 0 = 72$ diperoleh $X_1 = 18$ maka titik potongnya adalah **(18,0)**.
Sedangkan titik potong dengan sumbu-X_2 jika $X_1 = 0$:
$0 + 3X_2 = 72$ diperoleh $X_2 = 24$ maka titik potongnya adalah **(0,24)**.

Sehingga jika digambarkan pada Koordinat Cartesius adalah:



Gambar 2.1

Daerah Fisibel (Daerah Penyelesaian/Daerah yang Memenuhi Kendala) adalah daerah yang terletak di dalam bangun yang dibatasi oleh titik-titik O(0,0), A(18,0), D(0,20), dan B yaitu titik potong garis (i) dan garis (iii) sedangkan titik C adalah titik potong garis (ii) dan garis (iii). Adapun cara menghitung titik B dan C tersebut adalah sebagai berikut:

Titik **B** perpotongan antara garis (i) dan garis (iii):

$2X_1 + 1X_2 = 30$ ....i) Untuk $X_2 = 12$ maka $2X_1 + 12 = 30$ sehingga

$4X_1 + 3X_2 = 72$ ....iii) $\mathbf{X_1 = 9}$ maka titik B adalah **(9,12)**

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; -$$

$\mathbf{-X_2 = -12} \longrightarrow X_2 = 12$

Titik **C** perpotongan antara garis (ii) dan garis (iii):

$2X_1 + 3X_2 = 60$ ....i) Untuk $X_1 = 6$ maka $12 + 3X_2 = 60$ sehingga

$4X_1 + 3X_2 = 72$ ....iii) $X_2 = 16$ maka titik **C** adalah **(6,16)**

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; -$$

$\mathbf{-2X_1 = -12} \longrightarrow X_1 = 6$

Daerah penyelesaian (Daerah yang Memenuhi Kendala/Wilayah Kelayakan) adalah daerah OABCD yang titik-titik sudutnya adalah : *O(0,0), A(15,0), B(9,12), C(6,16),* dan *D(0,20)*.

*) Penyelesaian dari soal diatas adalah nilai fungsi sasaran ($Z = 3000\,X_1 + 3000\,X_2$) di setiap titik sudut-titik sudut Daerah yang Memenuhi Kendala adalah :

di titik O (0,0) $\rightarrow$ Z (0,0) = 3000. (0) + 3000.(0) = 0,

di titik A (15,0)$\rightarrow$ Z (15,0) = 3000.(15) + 3000.(0) = 45.000,00

di titik B (9,12) $\rightarrow$ Z (9,12) = 3000.(9) + 3000.(12) = 63.000,00

di titik C (6,16)$\rightarrow$ Z(6,16) = 3000.(6) + 3000.(16) = *66.000,00*

di titik D (0,20)$\rightarrow$ Z(0,20) = 3000.(0) + 3000.(20) = 60.000,00

*) Fungsi Tujuan adalah mencari nilai maksimumnya sehingga nilai yang sesuai adalah terletak pada titik C(6,16) yaitu dengan nilai fungsi tujuannya Rp. 66.000,00

*) Sehingga agar diperoleh laba yang maksimum maka Pimpinan"PT. Rakyat Bersatu" harus memproduksi *Produk I* sebanyak *6* unit dan *Produk II* sebanyak *16* unit, sehingga mendapat laba maksimum sebesar *Rp.66.000,00.*

Pertemuan ke-3

<u>Contoh Soal:</u>

1. Sebuah pabrik obat menyediakan 2 jenis campuran A dan B. Bahan-bahan dasar yang terkandung dalam tiap kg campuran A dan B adalah sebagai berikut

	Bahan Dasar	
	Bahan-1	Bahan-2
Campuran A	0,4 kg	0,6 kg
Campuran B	0,8 kg	0,2 kg

Dari campuran A dan B hendak dibuat campuran C. Campuran C ini sekurang-kurangnya mengandung bahan-1 sebanyak 4 kg dan bahan-2 sebanyak 3 kg. Harga tiap kg campuran A adalah Rp. 20.000,00 dan tiap kg campuran B adalah Rp.10.000,00. Berapakah campuran A dan B harus dibeli supaya biaya total pembuatan campuran C semurah-murahnya dan berapa biaya yang harus dikeluarkan?

2. Memaksimumkan $Z = 2\,X_1 + X_2$

   Fungsi Kendala :

   a. $X_1 + 2\,X_2 \leq 80$

   b. $3X_1 + 2\,X_2 \leq 120$

   c. $2X_1 \qquad \leq 360$ dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$.

3. Meminimumkan $F = 22\,X_1 + 6\,X_2$

   Fungsi Kendala :

   a. $11X_1 + 3\,X_2 \geq 33$

   b. $8X_1 + 5X_2 \leq 40$

   c. $7X_1 + 10X_2 \leq 70$

   dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$,

Pertemuan ke-9
TIPE-TIPE KHUSUS
PERSOALAN PROGRAM LINIER

4.1. PENDAHULUAN

Selain persoalan program linier seperti yang telah dibicarakan pada bab-bab sebelumnya, ada persoalan program linier yang bertipe khusus, yang kekhususannyaterletak pada karakteristik utama. Karakter-karakter khusus tersebut diantaranya persoalan-persoalan tersebut cenderung membutuhkan sejumlah pembatas dan variabel yang sangat banyak sehingga penggunaan komputer dalam penyelesaian metode simpleksnya sangat mahal, proses penghitungannya menghadapi berbagai hambatan. Karakteristik lainnya adalah kebanyakan koefisien a_{ij} dalam pembatasan-pembatasannya berharga nol, dan sedikit sekali koefisien yang bukan nol terjadi dalam satu pola tertentu.

Tipe khusus persoalan program linier yang paling penting ialah apa yang dikenal sebagai persoalan transportasi dan persoalan penugasan (assignment) yang erat kaitannya dengan persoalan transportasi.

4.2. PERSOALAN TRANSPORTASI

Persoalan transportasi membahas masalah pendistribusian suatu komoditas atau produk dari sejumlah sumber (supply) ke sejumlah tujuan (demand, destination) dengan tujuan meminimumkan ongkos pengangkutan yang terjadi.

Ciri-ciri khusus persoalan transportasi adalah :

1. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu.
2. Kuantitas komoditas atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh setiap tujuan, besarnya tertentu.
2. Komoditas yang dikirim atau diangkut dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber.
3. Ongkos pengangkutan komoditas dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya tertentu.

4.2.1. Model Transportasi

Sebuah model transportasi dari sebuah jaringan dengan m sumber dan n tujuan. Sebuah sumber atau tujuan diwakili dengan sebuah node. Busur yang menghubungkan sebuah sumber dan sebuah tujuan mewakili rute pengiriman barang tersebut. Jumlah penawaran di sumber i adalah a_i dan permintaan di tujuan j adalah b_j . Biaya unit transportasi antara sumber i dan tujuan j adalah c_{ij}. Anggaplah X_{ij} mewakili jumlah barang yang dikirimkan dari sumber i ke tujuan j, maka model Program Linier yang mewakili masalah transprotasi ini secara umum adalah sebagai berikut:

Meminimumkan $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$

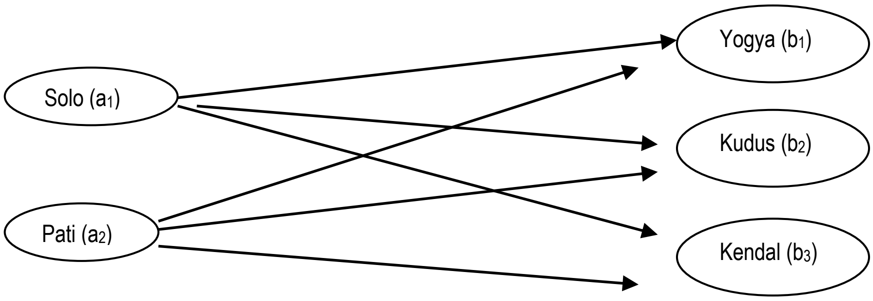
dengan batasan:

(i) $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$, untuk i = 1,2,..., m (ii) $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$, untuk j = 1, 2, ... , n

dan $X_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j.

Contoh ilustrasi

Jika terdapat 2 buah sumber (m=2, misalkan Solo dan Pati) dan 3 tujuan (n=3, misalkan Yogya, Kudus dan Kendal) maka dapat dinyatakan distribusi sebagai berikut:



Keterangan :
Jumlah persediaan barang di sumber ke-1 (Solo) sebanyak a_1 satuan, persediaan di sumber ke-2 (Pati) sebanyak a_2, sedangkan kapasitas di tujuan ke-1 (Yogya) sebesar b_1, tujuan ke-2 (Kudus) sebesar b_2, dan tujuan ke-3 (Kendal) sebesar b_3.
Jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-1 (Solo) ke tujuan ke-1 (Yogya) sebesar X_{11} dan ongkos angkut per unitnya C_{11}, jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-1 (Solo) ke tujuan ke-2 (Kudus) sebesar X_{12} dan ongkos angkut per unitnya C_{12}, jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-1 (Solo) ke tujuan ke-3 (Kendal) sebesar X_{13} dan ongkos angkut per unitnya C_{13}, sedangkan jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-2 (Pati) ke tujuan ke-1 (Yogya) sebesar X_{21} dan ongkos angkut per unitnya C_{21}, jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-2 (Pati) ke tujuan ke-2 (Kudus) sebesar X_{22} dan ongkos angkut per unitnya C_{22}, jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-2 (Pati) ke tujuan ke-3 (Kendal) sebesar X_{23} dan ongkos angkut per unitnya C_{23}. Maka model transportasinya adalah sebagai berikut :

1. Fungsi Tujuan :
   Meminimumkan : $Z = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} + C_{21} X_{21} + C_{22} X_{22} + C_{23} X_{23}$
   $= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$
2. Fungsi Kendala :
   a) $X_{11} + X_{12} + X_{13} = a_1$
   b) $X_{21} + X_{22} + X_{23} = a_2$
   c) $X_{11} + X_{21} = b_1$
   d) $X_{12} + X_{22} = b_2$
   e) $X_{13} + X_{23} = b_3$

atau dapat dinyatakan dalam notasi :

untuk fungsi kendala a) dan b) dapat dinyatakan : $\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = a_i$ $\sum$ $X_{ij} = a_i$, untuk i = 1, 2 . Sedangkan untuk fungsi kendala c), d), dan e) dapat dinyatakan dalam : $\sum_{i=1}^{2} X_{ij} = b_j$, untuk j = 1, 2, 3

3. Dan syarat non negatifnya
   $X_{ij} \geq 0$ untuk semua i= 1,2 dan j = 1,2,3.

Kelompok batasan pertama menetapkan bahwa jumlah pengiriman dari sebuah sumber tidak dapat melebihi penawarannya; demikian pula, kelompok batasan kedua mengharuskan bahwa jumlah pengiriman ke sebuah tujuan harus memenuhi permintaannya. Suatu permasalahan transprotasi dikatakan *seimbang* (balanced transportation model) jika total penawaran (total supply) *sama dengan* total permintaan (total demand), dengan kata lain : $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (iii)

Dalam persoalan yang sebenarnya, batasan ini tidak selalu dipenuhi, atau dengan kata lain jumlah supply yang tersedia mungkin lebih besar atau lebih kecil dari jumlah yang diminta, jika hal ini terjadi disebut dengan model *transportasi tidak seimbang* (unbalanced). Namun setiap persoalan transportasi selalu dapat dibuat menjadi seimbang dengan memasukkan variabel semu (artificial variable). Jika jumlah demand melebihi jumlah supply, maka dibuat suatu sumber *dummy* yang akan mensupply kekurangan tersebut, yaitu sebanyak $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

Sebaliknya, jika jumlah supply melebihi jumlah demand, maka dibuat suatu tujuan *dummy* yang akan menyerap kelebihan tersebut, yaitu sebanyak $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

Ongkos transportasi per-unit (c_{ij}) dari sumber dummy keseluruh tujuan adalah nol. Hal ini dapat dipahami karena pada pada kenyataannya dari sumber dummy tidak terjadi pengiriman.

Dari persamaan (i), (ii) dan (iii) diperoleh bahwa setiap X_i memenuhi (m+n-1) persamaan pasti juga akan memenuhi persamaan ke-n. Dengan demikian persamaan ke-n dapat diabaikan. Ini berarti ada (m+n-1) persamaan yang benar-benar bebas artinya berbeda satu dengan yang lain dan memuat m,n perubah. Jumlah variabel basis yang tidak sama dengan nol adalah (m+n-1). Salah satu diantara (m+n-1) penyelesaian basis di atas akan merupakan jawab optimal yang diharapkan.

Format tabel masalah transportasi

Untuk menyelesaikan permasalahan transportasi dapat disusun tabel sebagai berikut :

	T_1	T_2	...	T_n	a_i
A_1	X_{11} [c_{11}]	X_{12} [c_{12}]	...	X_{1n} [C_{1n}]	a_1
A_2	X_{21} [c_{21}]	X_{22} [c_{22}]	...	X_{2n} [C_{2n}]	a_2
. . .	. . .	. . .	...	. . .	. . .
A_m	X_{m1} [c_{m1}]	X_{m2} [c_{m2}]	...	X_{mn} [c_{mn}]	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum$

4.2.2. Penyelesaian Permasalahan Transportasi

Untuk menyelesaikan persoalan transportasi, harus dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan Solusi Fisibel Basis Awal.
2. Menentukan *entering variable* dari variabel-variabel nonbasis. Bila semua variabel sudah memenuhi kondisi optimal, STOP. Bila belum lanjutkan ke langkah 3.
3. Tentukan *leaving variable* diantara variabel-variabel basis yang ada, kemudian hitung solusi yang ada. Kembali ke langkah 2.

Untuk menentukan Solusi Fisibel Basis Awal terdapat 3 metode yang dapat digunakan, yaitu :

1. Metode Pojok Kiri Atas Pojok Kanan Bawah / Metode Pojok Barat Laut / *North West Corner.*
2. Metode Ongkos Terkecil (*Least Cost*).
3. Metode Pendekatan Vogel (*Vogel's Approximation Method's / VAM)*.

Untuk mencari Jawab Optimal terdapat 2 metode yang dapat digunakan, yaitu :

1. Metode Batu Loncatan (*Stepping Stone*).
2. Metode Faktor Pengali (*Multiplier*) / Metode MODI (*Modified Distribution*)

4.2.2.1 Menentukan Solusi Fisibel Basis Awal

a. Metode Metode Pojok Kiri Atas (*North West Corner*)

Metode ini mula-mula diperkenalkan oleh Charnes dan Cooper kemudian diperluas oleh Danziq. Langkah-langkah Metode Pojok Barat Laut adalah sebagai berikut

1. Dimulai dengan mengisi kotak pojok barat laut yaitu sel (1,1) sehingga $X_{11} = \min\{a_1, b_1\}$

   Terdapat 3 kemungkinan, yaitu:

   a. Jika $a_1 > b_1$, maka $X_{11} = b_1$, kemudian dilanjutkan langkah mendatar

      yaitu : $X_{12} = \min\{a_1 - X_{11}, b_1\}$.

b. Jika $a_1 = b_1$, maka $X_{11} = b_1 = a_1$, kemudianD ilanjutkan langkah miring

yaitu: $X_{22} = \min \{a_2 , b_2\}$.

c. Jika $a_1 < b_1$, maka $X_{11} = a_1$, kemudian dilanjutkan langkah turun yaitu:

$X_{21} = \min \{a_2 , b_1 - X_{11}\}$.

2. Langkah di atas diulangi sambil melangkah menuju arah tenggara atau kotak (m,n) atau ke arah pojok kanan bawah.

Contoh:

Dari 3 buah pelabuhan A_1, A_2 dan A_3 terdapat semen sebanyak masing-masing 120 ton, 170 ton dan 160 ton. Semen tersebut akan diangkut ke kota T_1 , T_2 dan T_3 yang masing-masing mempunyai daya tampung 150 ton, 210 ton dan 90 ton. Biaya pengiriman dari pelabuhan A_1 ke kota T_1 , T_2 dan T_3 masing-masing adalah 50, 100 dan 100 (dalam ribuan rupiah/ton). Biaya pengiriman dari pelabuhan A_2 ke kota T_1 , T_2 dan T_3 adalah 200, 300 dan 200, sedangkan biaya pengiriman dari pelabuhan A_3 ke kota T_1 , T_2 dan T_3 adalah 100, 200 dan 300. Sajikan dalam tabel transportasi dan berapa biaya awalnya?

Penyelesaian :

	T_1	T_2	T_3	a_i
A_1	*50* 120	*100*	*100*	120
A_2	*200* 30	*300* 140	*200*	170
A_3	*100*	*200* 70	*300* 90	160
B_j	150	210	90	450

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

Dimulai dari sel (1,1) yaitu menentukan nilai dari $X_{11} = \min \{a_1 ,b_1\} = \min\{120,150\} = 120$. Maka A_1 terpenuhi, dilanjutkan ke bawah yaitu sel (2,1) yaitu :

$X_{21} = \min \{a_2, b_1 - X_{11} \} = \min\{170,150-120\} = 30$ (T_1 terpenuhi).

$X_{22} = \min \{a_2 - X_{21} , b_2 \} = \min\{170-30,210\} = 140$ (A_2 terpenuhi).

$X_{32} = \min \{a_3 , b_2 - X_{22} \} = \min\{160,210-140\} = 70$ (T_2 terpenuhi).

$X_{33} = \min \{a_3 - X_{32} , b_3 \} = \min\{160 - 90, 90\} = 90$ (T_3 dan A_3 terpenuhi).

Jadi variabel-variabel basisnya adalah : X_{11} , X_{21} , X_{22} , X_{32} , dan $X_{33.}$ Sedangkan variabel-variabel non basisnya adalah : X_{12} , X_{13} , X_{23} , dan X_{31}.

Biaya awalnya adalah :

$Z = C_{11} X_{11} + C_{21} X_{21} + C_{22} X_{21} + C_{32} X_{32} + C_{33} X_{33}$

= (50.120 + 200.30 + 300.140 + 200.70 + 300.90) x Rp. 1.000,-

= (6.000 + 6.000 + 42.000 + 14.000 + 27.000) x Rp. 1.000,-

= *Rp. 95.000.000*,-

b. Metode Ongkos Terkecil (Least Cost)

Penentuan solusi fisibel basis awal dengan menggunakan metode ongkos terkecil tidak hanya mempertimbangkan barang yang harus didistribusikan saja tetapi sekaligus mempertimbangkan faktor biaya. Terdapat 2 cara dalam menentukan solusi fisibel basis awal dengan menggunakan metode ongkos terkecil yaitu *Metode Ongkos Baris Terkecil* dan *Metode Ongkos Kolom Terkecil.*

i. Metode Ongkos Baris Terkecil

Langkah-langkah yang digunakan:

Dimulai dari baris ke-1. Tentukan X_{1k} = min { a_1 , b_k } dimana k = kolom pada baris ke-1 yang mempunyai ongkos terkecil. Kemungkinan-kemungkinan yang ada untuk X_{1k} dan tindak lanjutnya adalah:

1. Jika X_{1k} = a_1 maka proses dilanjutkan ke baris ke-2, dengan memikirkan baris ke-1 telah terpenuhi.
2. Jika X_{1k} = b_k , maka lanjutkan ke kolom k, selanjutnya tentukan lagi ongkos terkecil pada baris ke-1 sehingga baris ke-1 terpenuhi.
3. Jika dalam proses dijumpai 2 atau lebih ongkos terkecil yang terletak pada suatu baris yang sama, dapat dipilih sembarang, demikian pula jika terdapat baris dan kolom yang dapat terpenuhi secara serentak, tinggalkan kolom yang bersangkutan dan lanjutkan memilih ongkos terkecil (sisanya) pada baris tersebut. Sel yang memuat baris seperti diatas dinyatakan sebagai baris berharga nol.

Contoh:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	a_i
A_1	*2*	*1* 40	*2* 35	*4*	*5*	75
A_2	*2* 30	*3*	*2*	*2*	*2*	30
A_3	*3*	*4*	*5*	*2* 25	*1* 40	65
A_4	*4* 20	*3*	*1* 10	*2* 50	*1*	80
b_j	50	40	45	75	40	250

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Baris-1

Ongkos terkecil terletak pada kolom-2 yaitu 1, maka:

X_{11} = min{a_1, b_2} = min{75, 40} = 40. Jadi kolom ke-2 (T_2) terpenuhi.

Ongkos terkecil berikutnya adalah pada kolom-1 dan kolom-3 yaitu 2 (pilih salah satu), dipilih kolom-3 maka: X_{13} = min{a_1 - X_{11}, b_3} = min{75-40, 45} = 35 dengan demikian baris-1 (A_1) terpenuhi.

2. Baris-2

Ongkos terkecil pada baris ke-2 terletak pada kolom-1, 3, 4 dan 5 yaitu 2 (dapat dipilih salah 1), dipilih kolom-1, maka: $X_{21} = \min\{a_2 , b_1\} = \min \{30, 50\} = 30$ sehingga baris-2 (A_2) terpenuhi.

3. Baris-3

Ongkos terkecil terletak pada kolom-5 yaitu 1, maka:

$X_{35} = \min\{a_3, b_5\} = \min \{65, 40\} = 40$ (kolom-5 (T_5) terpenuhi). Ongkos terkecil berikutnya terletak pada kolom-4 yaitu 2, maka: $X_{34} = \min\{a_3 - X_{35} , b_4\} = \min \{65-40, 75\} = 25$, sehingga baris-3 ($A_3$) terpenuhi.

4. Baris-4

Ongkos terkecil terletak pada kolom-3 dan 5 yaitu 1 (pilih salah 1), dipilih kolom-3, maka: $X_{43} = \min\{a_4 , b_3 - X_{13}\} = \min \{80, 45 - 35\} = 10$ sehingga kolom-3 (T_3) terpenuhi, selanjutnya untuk ongkos terkecil berikutnya terletak pada kolom-4 yaitu 2, maka: $X_{44} = \min\{a_4 - X_{43} , b_4 - X_{34}\} = \min\{80-10, 75-25\} = \min\{70, 50\} = 50$, yang tersisa tinggal kolom-1 sehingga : $X_{41} = \min\{a_4 - X_{43} - X_{44}, b_1 - X_{21}\} = \min\{80-10-50, 50-30\} = 20$, dengan demikian kolom-1 (T_1) dan baris-4 (A_4) terpenuhi.

Biaya awalnya adalah:

$Z = c_{12} X_{12} + c_{13} X_{13} + c_{21} X_{21} + c_{34} X_{34} + c_{35} X_{35} + c_{41} X_{41} + c_{43} X_{43} + c_{44} X_{44}$

$= 1(40) + 2(35) + 2(30) + 2(25) + 1(40) + 4(20) + 1(10) + 2(50)$

$= 40 + 70 + 60 + 50 + 40 + 80 + 10 + 100 =$ *450*.

ii. Metode Ongkos Kolom Terkecil

Langkah-langkah yang digunakan adalah analog dengan metode ongkos baris terkecil tetapi melangkah mulai dari kolom pertama sampai dengan kolom terakhir.

Contoh :

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	a_i
A_1	*3* 20	*1* 40	*2*	*4*	*5* 15	75
A_2	*2* 30	*3*	*2*	*2*	*2*	30
A_3	*3*	*4*	*5*	*2* 65	*1*	65
A_4	*4*	*3*	*1* 45	*2* 10	*1* 25	80
b_j	50	40	45	75	40	250

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. *Kolom-1*

   Ongkos terkecil terletak pada baris-2 yaitu 2, maka : X_{21} = min{a_2, b_1} = min{30, 50} = 30. Jadi baris-2 (A_2) terpenuhi.

   Ongkos terkecil berikutnya adalah pada baris-1 dan baris-3 yaitu 3 (pilih salah satu), dipilih baris-1 maka : X_{11} = min{a_1, b_1- X_{21}} = min{75 , 50-30} = 20 dengan demikian kolom-1 (T_1) terpenuhi.

2. *Kolom-2*

   Ongkos terkecil terletak pada baris-1 yaitu 1, maka : X_{12} = min{a_1- X_{11} , b_2} =

   min {75-20, 40} = 40 sehingga kolom-2 (T_2) terpenuhi.

3. *Kolom-3*

   Ongkos terkecil terletak pada baris-4 yaitu 1, maka : X_{43} = min{a_4 , b_3} =

   min {80 , 45} = 45 sehingga kolom-3 (T_3) terpenuhi.

4. *Kolom-4*

   Ongkos terkecil terletak pada baris-3 dan 4 yaitu 2 (pilih salah satu), dipilih baris-3 maka : X_{34} = min{a_3, b_4} = min{65, 75} = 65. Jadi baris-3 (A_3) terpenuhi.

   Ongkos terkecil berikutnya adalah pada baris-4 yaitu 2, maka :

   X_{44} = min{a_4 - X_{43} , b_4- X_{34}} = min{80-45 , 75-65} = 10 dengan demikian kolom-4 (T_4) terpenuhi.

5. *Kolom-5*

   Ongkos terkecil terletak pada baris-4 maka :

   X_{45} = min{a_4 - X_{43} - X_{44}, b_5} = min{25, 40} = 25. Jadi baris-4 terpenuhi.

   Sel terakhir yang belum terpenuhi adalah baris-1 kolom-5, sehingga :

   X_{15} = min{a_1 - X_{11} - X_{12}, b_4- X_{45}} = 15 dengan demikian kolom-5 (T_4) dan baris-1 terpenuhi.

   Biaya awalnya adalah :

   $Z = c_{11} X_{11} + c_{12} X_{12} + c_{15} X_{15} + c_{21} X_{21} + c_{34} X_{34} + c_{43} X_{43} + c_{43} X_{43} + c_{44} X_{44} + c_{45} X_{45}$

   = 3.20 + 1.40 + 5.15 + 2.30 + 2.65 + 1.45 + 2.10 + 1.25

   = 60 + 40 + 75 + 60 + 130 + 45 + 20 + 25 = *455*

c. Metode Pendekatan Vogel / Vogel's Approximation Method (VAM)

Metode Pendekatan Vogel diperkenalkan oleh WR. Vogel tahun 1948. Prinsip dari metode ini adalah memilih harga-harga ongkos terkecil tiap-tiap baris kemudian menghitung selisih antara ongkos terkecil tersebut dengan ongkos terkecil berikutnya. Dalam hal ini yang selisihnya nol tidak diperhatikan. Hal yang sama diperlakukan terhadap kolom. Bilangan-bilangan selisih tersebut dikenal dengan *bilangan Vogel*.

Langkah-langkah pengerjaannya adalah sebagai berikut :

1. Hitung penalty untuk tiap baris dan kolom dengan jalan mengurangkan elemen ongkos terkecil dari yang kedua terkecil.
2. Selidiki kolom/baris dengan penalty terbesar. Alokasikan sebanyak mungkin pada variabel dengan ongkos terkecil, sesuaikan supply dan demand, kemudian tandai kolom/baris yang sudah terpenuhi. Kalau ada

2 buah baris/kolom yang terpenuhi secara simultan, pilih salah satu untuk ditandai, sehingga supply/demand pada baris/kolom yang tidak terpilih variabelnya adalah nol. Setiap baris/kolom dengan demand/supply sama dengan nol, tidak akan terbawa lagi dalam penghitungan penalty berikutnya.

3. a. Bila tinggal 1 baris/kolom yang belum ditandai, STOP.
   b. Bila tinggal 1 kolom/baris dengan supply/demand positif yang belum ditandai, tentukan variabel basis pada baris/kolom dengan cara ongkos terkecil.
   c. Bila semua baris dan kolom yang belum ditandai mempunyai supply dan demand sama dengan nol, tentukan variabel-variabel basis yang berharga nol dengan cara ongkos terkecil. Kemudian STOP.
   d. Jika 3a, b dan c tidak terjadi, hitung kembali penalty untuk baris/kolom yang belum ditandai. Kembali ke langkah 2.

Contoh :

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	a_i	Penalty Baris						
A_1	3 / 30	1 / 40	2 / 5	4	5	75	1	1	1	1	1	1	$\underline{1}$
A_2	2 / 20	3	2	2 / 10	4	30	1	1	0	0	0	-	-
A_3	3	4	5	2 / 65	1	65	1	1	1	-	-	-	-
A_4	4	3	1 / 40	2	1 / 40	80	1	1	1	1	$\underline{3}$	-	-
b_j	50	40	45	75	40	250							
Penalty kolom	1	2	1	2	$\underline{3}$								
	1	$\underline{2}$	1	2	-								
	1	-	1	$\underline{2}$	-								
	1	-	1	$\underline{2}$	-								
	1	-	0	-	-								
	$\underline{1}$	-	0	-	-								
	-	-	0	-	-								

Langkah-langkah pengisian variabel basisnya adalah sebagai berikut:

a) Tentukan penalty baris dan penalty kolom dengan cara mengurangkan ongkos terkecil pada setiap baris dan atau setiap kolom dengan ongkos terkecil berikutnya pada setiap baris dan atau setiap kolom. Misalkan pada kolom ke-1 ongkos terkecilnya adalah 2 dan ongkos terkecil selanjutnya adalah 3 maka selisihnya adalah 1, demikian juga untuk kolom yang lain dan baris yang lainnya, sehingga diperoleh seperti dalam tabel diatas.

b) Pilih penalty baris/kolom yang terbesar yaitu terletak di kolom ke-5 yaitu 3, maka ongkos terkecil yang terdapat pada kolom ke-5 adalah pada baris ke-3 dan ke-4, maka dapat dipilih :

Max{min{a_3, b_5},min{a_4, b_5}} = Max{min{65, 40},min{80, 40}} =Max{40, 40} = 40 (dipilih baris-4) jadi : X_{45} = 40 sehingga kolom ke-5 (T_5) terpenuhi (kolom-5 ditandai), hitung lagi penalty baris/kolom berikutnya tanpa kolom ke-5.

c) Pilih penalty baris/kolom terbesar berikutnya yaitu pada kolom ke-2 dan ke-4 yaitu 2. (pilih salah satu) dipilih kolom ke-2 dimana ongkos terkecil yang terdapat pada kolom ke-2 adalah terdapat pada baris ke-1 yaitu 1, maka : X_{12} = min{a_1 , b_2}= min{75, 40} = 40 (kolom ke-2 ditandai). Hitung lagi penalty baris/kolom selanjutnya tanpa kolom ke-5 dan kolom ke-2.

d) Penalty terbesar selanjutnya terdapat pada kolom ke-4 dan ongkos terkecil yang terdapat pada kolom ke-4 ada di baris ke-2, ke-3 dan ke-4 maka : Max{Min{a_2, b_4}, Min{a_3, b_4}, Min{a_4, b_4-X_{45}}} = Max{Min{30, 75}, Min{65, 75}, Min{40, 75}} =Max{30,65,40} = 65 sehingga : X_{34} = 65 (baris ke-3 ditandai), hitung penalty lagi tanpa kolom ke-2, kolom ke-5 dan baris ke-3.

e) Penalty terbesar masih terdapat pada kolom ke-4 yaitu 2, maka dapat dipilih : Max{Min{a_2, b_4-X_{34}}, Min{a_4-X_{45} ,b_4-X_{34}}} = Max{Min{30, 10},Min{40, 10}}=Max{10, 10} = 10 sehingga X_{24} = 10 (kolom-4 ditandai) hitung penalty lagi tanpa kolom ke-2, ke-3, ke-4 dan baris ke-3.

f) Penalty terbesar terdapat pada baris ke-4 dan ongkos terkecil pada baris ke-4 adalah ada di kolom ke-3 maka : X_{34} = Min{a_4 - X_{45} ,b_3} = min{80-40, 45} = 40 (baris-4 ditandai).

g) Selanjutnya kolom-1 ,3 dan baris-1, pilih kolom ke-1 di mana ongkos terkecil terdapat di baris ke-2 yaitu 2, maka : X_{21} =min{a_2 - X_{24} , b_1} = min{30-10,50} = 20 (baris-2 ditandai).

h) Dilanjutkan ke baris ke-1 dimana ongkos terkecil yang tersisa terdapat di kolom ke-3 sehingga : X_{13} = Min{a_1 - X_{12} ,b_3 - X_{43}} = Min{75-40,45-40) = 5 (kolom-3 ditandai). Dan yang terakhir yang belum terpenuhi adalah baris ke-1 dan kolom ke-1 sehingga X_{11} = a_1 - X_{12} - X_{13} atau b_1 - X_{22} = 30.

Biaya awalnya adalah:

Z = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} + C_{21} X_{21} + C_{24} X_{24} + C_{43} X_{43} + C_{34} X_{34} + C_{43} X_{43} +C_{45} X_{45}

= 3.30 + 1.40 + 2.5 + 2.20 + 2.10 + 2.65 + 1.40 + 1.40 = *370*.

Pertemuan ke-10

4.2.2.2 Menentukan Solusi Optimal

A. Metode Batu Loncatan / Stepping Stones

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Apakah jumlah variabel basis sama dengan n+m-1? Jika *kurang dari* m+n-1 maka akan terjadi *kemerosotan (degeneracy)*. STOP.

   Tetapi jika *sama* maka dapat dihitung $Z_{ij} - C_{ij}$ untuk sel-sel yang bukan basis, dengan cara sebagai berikut:

   a. Dibuat *loop* tertutup bagi setiap variabel non basis dimana loop tersebut berawal dan berakhir pada variabel non basis tadi, dan setiap titik sudut loop tersebut harus merupakan titik-titik yang ditempati oleh variabel-variabel basis dalam tabel transportasi.

   b. Dihitung $Z_{ij} - C_{ij}$ = jumlahan para C_{ij} pada loop dengan koefisien (+1) dan (-1) bergantian dengan koefisien variabel non basis (-1).

2. Menentukan variabel yang masuk menjadi basis *(entering variable)* dengan cara memilih nilai $Z_{ij} - C_{ij}$ yang terbesar atau Max$\{Z_{ij} - C_{ij}\}$. X_{st} masuk menjadi basis bila dan hanya bila $Z_{st} - C_{st} = \text{Max}\{Z_{ij} - C_{ij}\}$.

3. Menentukan variabel yang keluar dari basis, caranya:

   a. Dibuat loop yang memuat X_{st}.

   b. Diadakan pengamatan para C_{ij} dalam loop yang mempunyai koefisien (+1).

   c. Variabel X_{ab} yang keluar basis bila dan hanya bila X_{ab} minimum dari langkah 3b.

4. Menentukan harga variabel basis (yang berada di dalam loop yang baru/penyesuaian untuk variabel basis yang baru).

   $X_{st} = X_{ab} = X_{pq}$

   Sedangkan untuk variabel-variabel basis yang lain yang juga berada dalam loop.

   $X_{ab(baru)} = X_{ab} + X_{pq}$ (untuk a+b = ganjil)

   $X_{ab(baru)} = X_{ab} - X_{pq}$ (untuk a+b = genap)

5. Untuk variabel-variabel basis yang lain diluar loop harganya tetap.

6. Diperoleh tabel optimal jika semua $Z_{ij} - C_{ij} \geq 0$.

Jika jawab optimal belum diperoleh maka proses tersebut diulang kembali.

Contoh Soal:

	T_1		T_2		T_3		a_i
A_1	120	*50*	*(50)*	*100*	*(150)*	*100*	120
A_2	30	*200*	140	*300*	*[200]*	*200*	170
A_3	*(0)*	*100*	70	*200*	90	*300*	160
b_j	150		210		90		450

Penyelesaian :

Dari contoh soal tersebut diatas solusi fisibel basis awal ditentukan dengan menggunakan Metode Pojok Barat Laut dan biaya awalnya adalah :

$Z_{awal} = C_{11}\,X_{11} + C_{21}\,X_{21} + C_{22}\,X_{21} + C_{32}\,X_{32} + C_{33}\,X_{33}$

$= (50.120 + 200.30 + 300.140 + 200.70 + 300.90)$ x Rp. 1.000,-

$= (6.000 + 6.000 + 42.000 + 14.000 + 27.000)$ x Rp. 1.000,-

= Rp. 95.000.000,-

Dengan menggunakan Metode Batu Loncaran dapat dicari jawab optimalnya dengan cara sebagai berikut :

<u>Evaluasi terhadap variabel non basis:</u>

1. Menghitung nilai $Z_{ij} - C_{ij}$ untuk sel-sel non basis, yakni sel (1,2), (1,3), (2,3) dan (3,1).

   Loop untuk sel (1,2) adalah melalui sel yang merupakan basis yaitu (1,1), (2,1), (2,2) dan (1,2), sehingga diperoleh :

   $Z_{12} - C_{12} = C_{11} - C_{21} + C_{22} - C_{12} = 50 - 200 + 300 - 100 = 50$, untuk variabel non basis lainnya diperoleh :

   $Z_{13} - C_{13} = C_{11} - C_{21} + C_{22} - C_{32} + C_{33} - C_{13} = 50 - 200 + 300 - 200 + 300 - 100 = 150$.

   $Z_{23} - C_{23} = C_{22} - C_{32} + C_{33} - C_{23} = 300 - 200 + 300 - 200 = 200$.

   $Z_{31} - C_{31} = C_{21} - C_{22} + C_{32} - C_{31} = 200 - 300 + 200 - 100 = 0$.

2. Karena nilai dari $Z_{ij} - C_{ij}$ masih ada yang positif maka tabel belum optimal, maka dapat ditentukan *variabel yang baru masuk menjadi basis* (*entering variable*) dengan memilih nilai yang terbesar dari $Z_{ij} - C_{ij}$ yaitu $Z_{23} - C_{23} = 200$. Jadi X_{23} *masuk* menjadi basis yang baru.

3. Menentukan *variabel yang keluar dari basis (leaving variable)* dengan cara :

   dibuat loop dari variabel-variabel X_{ij} yang melalui X_{23} yaitu : $X_{22} - X_{32} + X_{33} - X_{23}$ sehingga variabel yang keluar basis adalah Min{ X_{22}, X_{33} } = Min {140,90} = 90 = X_{33}. Jadi X_{33} *keluar* basis dan nilai dari variabel yang baru masuk menjadi basis ($X_{23} = 90$).

4. Diadakan perubahan variabel basis yang berada dalam loop (diadakan perubahan nilai dari variabel-variabel basis yang berada di dalam loop, sedangkan variabel basis yang berada di luar loop nilainya tetap), sehingga diperoleh :

   $X_{22(baru)} = X_{22} - X_{23} = 140 - 90 = 50$.

$X_{32(baru)} = X_{32} + X_{23} = 70 + 90 = 160.$

X_{33} = Keluar basis (leaving variable)

X_{23} = 90 (yang baru masuk menjadi basis / entering variable)

Sehingga tabelnya berubah menjadi :

	T_1	T_2	T_3	a_i
A_1	50 120	100 [50]	100 (-50)	120
A_2	200 30	300 50	200 90	170
A_3	100 (0)	200 160	300 (-200)	160
b_j	150	210	90	450

Biayanya =

$Z_1 = C_{11} X_{11} + C_{21} X_{21} + C_{22} X_{22} + C_{23} X_{23} + C_{32} X_{32}$

= (50.120 + 200.30 + 300.50 + 200.90 + 200.160) x Rp. 1.000,-

= Rp. 77.000.000,-

atau $Z_1 = Z_{awal} - (Z_{23} - C_{23} \times X_{23})$

= Rp. 95.000.000 – (Rp. 200.000 x 90 ton) = Rp. 77.000.000,-

Dimana Rp. 95.000.000,- merupakan biaya sebelum diadakan perubahan variabel basis, 90 ton adalah nilai variabel yang masuk menjadi basis (X_{23}) sedangkan Rp. 200.000,- merupakan nilai dari $Z_{23} - C_{23}$. (Max dari $Z_{ij} - C_{ij}$ / penurunan ongkos kirim).

<u>Perbaikan I</u>

Kemudian diadakan perhitungan terhadap nilai dari $Z_{ij} - C_{ij}$ sel-sel non basis, yaitu sel (1,2), (1,3), (3,1) dan (3,3) dengan membuat loop, sehingga diperoleh :

$Z_{12} - C_{12} = C_{11} - C_{21} + C_{22} - C_{12} = 50 - 200 + 300 - 100 = 50.$

$Z_{13} - C_{13} = C_{11} - C_{21} + C_{23} - C_{13} = 50 - 200 + 200 - 100 = -50.$

$Z_{31} - C_{31} = C_{21} - C_{22} + C_{32} - C_{31} = 200 - 300 + 200 - 100 = 0.$

$Z_{33} - C_{33} = C_{23} - C_{22} + C_{32} - C_{33} = 200 - 300 + 200 - 300 = -200.$

Karena masih ada nilai dari $Z_{ij} - C_{ij}$ yang positif yaitu $Z_{12} - C_{12} = 50$ maka tabel belum optimal.

Variabel yang masuk menjadi basis adalah Max$\{Z_{ij} - C_{ij}\} = Z_{12} - C_{12} = 50$, sehingga *$X_{12}$ masuk* menjadi basis.

Untuk menentukan variabel yang keluar basis dibuat loop yang melalui X_{12} yaitu:

$X_{11} - X_{21} + X_{22} - X_{12}$ sehingga variabel yang keluar basis adalah Min$\{X_{11}, X_{22}\}$ = Min{120,50} = 50 = X_{22}, jadi *X_{22} keluar* basis, sehingga nilai dari variabel yang baru masuk menjadi basis yaitu $X_{12} = 50$, sedangkan untuk variabel-variabel lain yang berada dalam loop adalah:

$X_{11(baru)} = X_{11} - X_{22} = 120 - 50 = 70.$

$X_{21(baru)} = X_{21} + X_{22} = 30 + 50 = 80.$

X_{22} keluar basis dan $X_{12} = 50$ (yang baru masuk menjadi basis).

Maka tabelnya berubah menjadi:

	T_1	T_2	T_3	a_i
A_1	*50* 70	*100* 50	*100* (-50)	120
A_2	*200* 80	*300* *(-50)*	*200* 90	170
A_3	*100* *[50]*	*200* 160	*300* *(-50)*	160
b_j	150	210	90	450

Biayanya =

Z_2 $= C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{21} X_{21} + C_{23} X_{23} + C_{32} X_{32}$

$= (50.70 + 100.50 + 200.80 + 200.90 + 200.160) \times$ Rp. 1.000,-

= Rp. 74.500.000,-

Atau $Z_2 = Z_1 - (Z_{12} - C_{12} \times X_{12})$ = Rp. 77.000.000 – (Rp. 50.000 x 50 ton) = Rp. 74.500.000,-

<u>Perbaikan II</u>

Kemudian diadakan perhitungan terhadap nilai dari $Z_{ij} - C_{ij}$ untuk sel-sel non basis, yaitu sel (1,3), (2,2), (3,1) dan (3,3) dengan loop, dan diperoleh :

$Z_{13} - C_{13} = C_{11} - C_{21} + C_{23} - C_{13} = 50 - 200 + 200 - 100 = -50.$

$Z_{22} - C_{22} = C_{12} - C_{11} + C_{21} - C_{22} = 100 - 50 + 200 - 300 = -50.$

$Z_{31} - C_{31} = C_{11} - C_{12} + C_{32} - C_{31} = 50 - 100 + 200 - 100 = 50.$

$Z_{33} - C_{33} = C_{23} - C_{21} + C_{11} - C_{12} + C_{32} - C_{33} = 200 - 200 + 50 - 100 + 200 - 300 = -50.$

Karena masih ada nilai dari $Z_{ij} - C_{ij}$ yang positif maka tabel belum optimal.

Variabel yang masuk menjadi basis adalah Max$\{Z_{ij} - C_{ij}\} = Z_{31} - C_{31} = 50$, sehingga *$X_{31}$ masuk* menjadi basis.

Untuk menentukan variabel yang keluar basis dibuat loop yang melalui X_{31} yaitu :

$X_{11} - X_{12} + X_{32} - X_{31}$ sehingga variabel yang keluar basis adalah Min$\{X_{11}, X_{32}\}$ = Min{70,160} = $70 = X_{11}$, jadi *X_{11} keluar* basis. Sedangkan nilai dari variabel yang baru masuk menjadi basis adalah $X_{31} = 70$, sedangkan untuk variabel basis lain yang berada dalam loop adalah:

X_{11} keluar basis

$X_{12(baru)} = X_{12} + X_{31} = 50 + 70 = 120.$

$X_{32(baru)} = X_{32} - X_{31} = 160 - 70 = 90.$

$X_{31} = 70$ (yang baru masuk menjadi basis).

Sehingga tabelnya berubah menjadi:

	T_1	T_2	T_3	a_i
A_1	*50* *(-50)*	*100* 120	*100* (-100)	120
A_2	*200* 80	*300* *(0)*	*200* 90	170
A_3	*100* 70	*200* 90	*300* *(-200)*	160
b_j	150	210	90	450

Biayanya =

$Z_3 = C_{12} X_{12} + C_{21} X_{21} + C_{23} X_{23} + C_{31} X_{31} + C_{32} X_{32}$

$= (100.120 + 200.80 + 200.90 + 100.70 + 200.90)$ x Rp. 1.000,-

= Rp. 71.000.000,-

<u>Perbaikan III</u>

Kemudian diadakan perhitungan terhadap nilai dari $Z_{ij} - C_{ij}$ sel-sel non basis, yaitu sel (1,1), (1,3), (2,2) dan (3,3) dengan loop, dan diperoleh :

$Z_{11} - C_{11} = C_{12} - C_{32} + C_{31} - C_{11} = 100 - 200 + 100 - 50 = -50.$

$Z_{13} - C_{13} = C_{12} - C_{32} + C_{31} - C_{21} + C_{23} - C_{13} = 100 - 200 + 100 - 200 + 200 - 100 = -100.$

$Z_{22} - C_{22} = C_{21} - C_{31} + C_{32} - C_{22} = 200 - 100 + 200 - 300 = 0.$

$Z_{33} - C_{33} = C_{23} - C_{21} + C_{31} - C_{33} = 200 - 200 + 100 - 300 = -200.$

Karena semua nilai dari $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$ maka tabel sudah optimal.

Dan nilai $Z_{optimal}$ = Rp. 71.000.000,-

Pertemuan ke-11

B. Metode MODI (Modified Distribution) / Faktor Pengali (Multiplier)

Metode MODI disebut juga metode Faktor Pengali atau Multiplier. Cara iterasinya sama seperti Metode Batu Loncatan. Perbedaan utama terjadi pada cara pengevaluasian variabel non basis, atau penentuan penurunan ongkos transport per unit untuk tiap variabel. Cara ini dikembangkan berdasarkan teori dualitas. Untuk setiap baris ke-*i* dari tabel transportasi dikenal suatu *bilangan baris* (multiplier u_i) dan untuk setiap kolom ke-*j* disebut *bilangan kolom* (multiplier v_j) sehingga untuk tiap variabel *basis* X_{ij} diperoleh persamaan:

$u_i + v_j = C_{ij}$ (i)

Cara pengisiannya ditentukan terlebih dahulu salah satu u_i atau v_j secara sembarang misalnya $u_1 = 0$, dengan demikian dengan persamaan (i) dapat diperoleh nilai u_i dan v_j yang lain. Setelah u_i dan v_j terisi semua maka untuk semua *variabel non basis* dapat dihitung:

$Z_{ij} - C_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$ (ii)

Akan diperoleh tabel optimal jika semua $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$ (semua negatif atau nol).

Jika tabel belum optimal cara menentukan variabel yang masuk menjadi basis (Entering Variable) dan variabel yang keluar basis (Leaving Variable) caranya sama seperti Metode Batu Loncatan.

Contoh Soal:

	T_1	T_2	T_3	a_i	u_i
A_1	4 120	8 *[4]*	8 (-4)	120	$u_1=0$
A_2	16 (0)	24 80	16 90	170	$u_2=12$
A_3	8 30	16 130	24 *(-16)*	160	$u_3=4$
b_j	150	210	90	450	
v_j	$v_1=4$	$v_2=12$	$v_3=4$		

Dengan menggunakan Metode Ongkos Kolom Terkecil diperoleh ongkos awalnya :

$Z = C_{12} X_{12} + C_{22} X_{22} + C_{23} X_{23} + C_{31} X_{31} + C_{32} X_{32}$

$= 4.120 + 24.80 + 16.90 + 8.30 + 16.130 = 6.160.$

Untuk mencari jawab optimal dengan menggunakan Metode MODI dengan cara sebagai berikut :

*) Dimulai dari variabel-variabel basis, berdasarkan persamaan (i) dengan memisalkan $u_1 = 0$, maka dapat dihitung bilangan baris (u_i) dan bilangan kolom (v_j) dengan cara sebagai berikut :

$u_1 + v_1 = C_{11} \rightarrow 0 + v_1 = 4 \rightarrow v_1 = 4.$

$u_3 + v_1 = C_{31} \rightarrow u_3 + 4 = 8 \rightarrow u_3 = 4.$

$u_3 + v_2 = C_{32} \rightarrow 4 + v_2 = 16 \rightarrow v_2 = 12.$

$u_2 + v_2 = C_{22} \rightarrow u_2 + 12 = 24 \rightarrow u_2 = 12.$

$u_2 + v_3 = C_{23} \rightarrow 12 + v_3 = 16 \rightarrow v_3 = 4.$

*) Sedangkan untuk variabel-variabel non basis berdasarkan persamaan (ii) dapat dihitung :

$Z_{12} - C_{12} = u_1 + v_2 - C_{12} \rightarrow Z_{12} - C_{12} = 0 + 12 - 8 = 4$

$Z_{13} - C_{13} = u_1 + v_3 - C_{13} \rightarrow Z_{13} - C_{13} = 0 + 4 - 8 = -4$

$Z_{21} - C_{21} = u_2 + v_1 - C_{21} \rightarrow Z_{21} - C_{21} = 12 + 4 - 16 = 0$

$Z_{33} - C_{33} = u_3 + v_3 - C_{33} \rightarrow Z_{33} - C_{33} = 4 + 4 - 24 = -16$

Karena masih ada $Z_{ij} - C_{ij}$ yang positif maka tabel belum optimal. Ditentukan variabel yang masuk menjadi basis dengan cara memilih Max{ $Z_{ij} - C_{ij}$} = $Z_{12} - C_{12}$ = 4. Jadi *X_{12} masuk* menjadi basis. Sedangkan variabel yang keluar basis, terlebih dulu dibuat loop yang melalui X_{12} yaitu : $X_{11} - X_{31} + X_{32} - X_{12}$. Min {X_{11} , X_{32} } = Min {120,130} = 120 = X_{11} (Keluar basis), sehingga setelah dilakukan penyesuaian variabel basisnya menjadi :

X_{11} = Keluar basis

X_{31} = 30 + 120 = 150

X_{32} = 130 – 120 = 10

X_{12} = 120

Sehingga diperoleh tabel baru sebagai berikut :

	T_1	T_2	T_3	a_i	u_i
A_1	*4* (-4)	*8* 120	*8* (-8)	120	u_1=0
A_2	*16* (0)	*24* 80	*16* 90	170	u_2=16
A_3	*8* 150	*16* 10	*24* (-16)	160	u_3=8
b_j	150	210	90	450	
v_j	v_1=0	v_2=8	v_3=0		

Dapat dihitung biayanya yaitu:

$Z_1 = C_{12} X_{12} + C_{22} X_{22} + C_{23} X_{23} + C_{31} X_{31} + C_{32} X_{32}$

$= (8.120 + 24.80 + 16.90 + 8.150 + 16.10)$

$= 5.680$

*) Dari variabel-variabel basis dapat dihitung lagi bilangan baris (u_i) dan bilangan kolomnya (v_j) sehingga diperoleh hasil seperti dalam tabel diatas.

*) Kemudian dihitung lagi $Z_{ij} - C_{ij}$ untuk variabel non basis:

$Z_{11} - C_{11} = u_1 + v_1 - C_{11} \rightarrow Z_{11} - C_{11} = 0 + 0 - 4 = -4$

$Z_{13} - C_{13} = u_1 + v_3 - C_{13} \rightarrow Z_{13} - C_{13} = 0 + 0 - 8 = -8$

$Z_{21} - C_{21} = u_2 + v_1 - C_{21} \rightarrow Z_{21} - C_{21} = 0 + 16 - 16 = 0$

$Z_{33} - C_{33} = u_3 + v_3 - C_{33} \rightarrow Z_{33} - C_{33} = 8 + 0 - 24 = -16$

Karena semua nilai $Z_{ij} - C_{ij}$ sudah negatif atau nol maka tabel sudah optimal dengan biaya optimal sebesar : $Z_{optimal}$ = 5.680.

4.2.3 Kemerosotan (Degeneracy)

Ciri-ciri terjadinya kemerosotan adalah banyaknya variabel basis yang lebih kecil dari n+m-1 (dimana m = jumlah sumber dan n = jumlah tujuan), hal ini disebabkan oleh:

1. Persediaan dan kebutuhan sama-sama habis pada langkah ke-1 dengan demikian Metode Batu Loncatan harus dihentikan.
2. Sub bagian dari persediaan sama-sama habis bersamaan dengan kebutuhan atau sebaliknya.

Jika terjadi kemerosotan, penyelesaian optimal dari suatu permasalahan transportasi belum dapat diselesaikan, dikarenakan salah satu dari variabel non basisnya tidak dapat dibuat suatu loop untuk mencari penyelesainnya. Agar dapat diselesaikan, maka permasalahan transportasi tersebut harus ditransformasikan dengan memperkenalkan bilangan $\varepsilon > 0$, sedemikian sehingga berlaku:

$\hat{a}_i = a_i + \varepsilon$, untuk i = 1, 2, ... , m

$b_j = b_j$, j = 1, 2, ... , (n-1), sedangkan untuk $b_n = b_n + m\varepsilon$.

Pemakaian ε hanyalah teoritis saja dan dalam prakteknya ε dapat dihilangkan.

Contoh:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	a_i
A_1	75					75
A_2		20	5			25
A_3			25			25
A_4				40	10	50
A_5					40	40
b_j	75	20	30	40	50	215

Dengan menggunakan Metode Pojok Kiri Atas Solusi Fisibel Basis Awalnya menghasilkan variabel basis sebanyak 7 buah yaitu X_{11}, X_{22} , X_{23}, X_{33} , X_{44}, X_{45} dan X_{55} , padahal seharusnya banyak variabel adalah n+m-1 = 5 + 5 - 1 = 9. Jadi terjadi kemerosotan (degeneracy). Agar soal diatas dapat dicari penyelesaian optimalnya maka dapat diatasi dengan cara sebagai berikut:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	a_i
A_1	75	ε				$75+\varepsilon$
A_2		$20-\varepsilon$	$5+2\varepsilon$			$25+\varepsilon$
A_3			$25-2\varepsilon$	3ε		$25+\varepsilon$
A_4				$40-3\varepsilon$	$10+4\varepsilon$	$50+\varepsilon$
A_5					$40+\varepsilon$	$40+\varepsilon$
b_j	75	20	30	40	$50+5\varepsilon$	$215+5\varepsilon$

4.2.4 Masalah Transportasi Tidak Seimbang

Suatu permasalahan transprotasi dikatakan *seimbang* (balanced transportation model) jika total penawaran (total supply) *sama dengan* total permintaan (total demand), dengan kata lain : $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Dalam persoalan yang sebenarnya, batasan ini tidak selalu dipenuhi, atau dengan kata lain jumlah supply yang tersedia mungkin lebih besar atau lebih kecil dari jumlah yang diminta, jika hal ini terjadi disebut dengan model *transprotasi tidak seimbang* (unbalanced). Namun setiap persoalan transportasi selalu dapat dibuat menjadi seimbang dengan memasukkan *variabel semu* (artificial variable). Jika jumlah demand *melebihi* jumlah supply, maka dibuat suatu sumber *dummy* yang akan mensupply kekurangan tersebut, yaitu sebanyak : $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

Sebaliknya, jika jumlah supply melebihi jumlah demand, maka dibuat suatu tujuan *dummy* yang akan menyerap kelebihan tersebut, yaitu sebanyak $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

Ongkos transportasi per-unit (C_{ij}) dari sumber dummy keseluruh tujuan adalah nol. Hal ini dapat dipahami karena pada pada kenyataannya dari sumber dummy tidak terjadi pengiriman.

Contoh :

	T_1	T_2	T_3	a_i
A_1	*1*	*1*	*3*	40
A_2	*1*	*5*	*7*	50
b_j	20	25	35	

Pada contoh diatas jumlah persediaan (supply) adalah 90 unit sedangkan jumlah permintaan (demand) adalah sebanyak 80 unit, sehingga tabel tidak seimbang. Agar persoalan transportasi diatas dapat diselesaiakan, maka ditambahkan sebuah kolom baru (dummy daerah tujuan D_1) dengan biaya masing-masing nol dan kelebihannya sebanyak 90-80 = 10 unit. Sehingga tabel menjadi:

	T_1	T_2	T_3	D_1	a_i
A_1	*1*	*1*	*3*	*0*	40
A_2	*1*	*5*	*7*	*0*	50
b_j	20	25	35	10	90

Pada kenyataannya besarnya dummy D_1 = 10 merupakan sisa barang yang tidak terkirim.

Pertemuan ke-12

4.3 MASALAH PENUGASAN (ASSIGNMENT)

Masalah penugasan merupakan kasus khusus dari model transportasi, dimana sejumlah m sumber ditugaskan kepada sejumlah n tujuan (satu sumber untuk satu tujuan) sedemikian sehingga diperoleh ongkos total yang minimum.

Biasanya yang dimaksud dengan sumber adalah pekerjaan (pekerja), sedangkan yang dimaksud dengan tujuan adalah mesin-mesin. Jadi, dalam hal ini, ada m pekerjaan yang ditugaskan kepada n mesin, dimana apabila pekerjaan i (i = 1, 2, ... , m) ditugaskan kepada mesin j (j = 1, 2, ... , n) akan muncul ongkos penugasan C_{ij} . Karena satu pekerjaan ditugaskan kepada satu mesin, maka supply yang dapat digunakan pada setiap sumber adalah 1 atau a_i = 1, untuk semua i). Demikian pula halnya dengan mesin-mesin, karena satu mesin hanya dapat menerima satu pekerjaan, maka demand dari setiap tujuan adalah 1 (atau b_j = 1, untuk semua j). Jika ada suatu pekerjaan yang tidak dapat ditugaskan pada mesin tertentu, maka c_{ij} yang berkorespondensi dengannya dinyatakan sebagai M, yang merupakan ongkos yang sangat tinggi. Penggambaran umum persoalan penugasan ini adalah sebagai berikut :

	M_1	M_2	...	M_n	a_i
P_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	1
P_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	1
. . .	. . .	. . .	...	. . .	. . .
P_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	1
b_j	1	1	...	1	

Sebelum model ini dapat dipecahkan dengan teknik transportasi, terlebih dahulu persoalannya harus diseimbangkan dengan menambahkan pekerjaan-pekerjaan atau mesin-mesin khayalan, tergantung apakah m > n atau m < n. Dengan demikian, diasumsikan bahwa m = n.

Secara matematis, model penugasan ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$X_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ jika pekerjaan ke-i tidak ditugaskan pada mesin ke-j.} \\ 1, \text{ jika pekerjaan ke-i ditugaskan pada mesin ke-j.} \end{cases}$$

Dengan demikian, model persoalan penugasan ini adalah:

Meminimumkan $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$

Berdasarkan pembatas : $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$, untuk i = 1,2,..., m (ii) $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1$, untuk j = 1, 2, ... , n

dan X_{ij} = 0 atau 1.

Suatu ciri khas persoalan penugasan adalah bahwa solusi optimum akan tetap sama bila suatu konstanta ditambahkan atau dikurangkan kepada baris atau kolom yang manapun dari matriks ongkosnya. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

Jika p_i dan q_j merupakan konstanta pengurang terhadap baris i dan kolom j, maka elemen ongkos yang baru adalah:

Z_{ij}-C_{ij} = C_{ij} - p_i - q_j

Sehingga fungsi tujuan baru menjadi :

$$\acute{Z} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}X_{ij} \; = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(C_{ij} - p_i - q_j)X_{ij} \; = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} - \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} X_{ij} - \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} X_{ij}$$

Karena $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$, maka Ź = Z = konstanta.

Hal ini menunjukkan bahwa meminimumkan Z akan menghasilkan solusi yang sama dengan meminimumkan Ź. Suatu hal yang menarik ialah bahwa jika kita melakukan operasi pengurangan p_i dan q_j terhadap matriks ongkos akan diperoleh *zero entries,* yaitu elemen-elemen ongkos dalam matriks yang berharga nol, yang juga merupakan variabel-variabel yang menghasilkan solusi optimal bagi Ź sehingga, berdasarkan pembuktian diatas, merupakan solusi optimal bagi Z.

Algoritma untuk menyelesaikan masalah penugasan yang biasa disebut *Metode Hungarian* adalah sebagai berikut:

1. Setiap baris/kolom dikurangi dengan ongkos terkecil dalam baris/kolom yang bersangkutan.
2. Menutup semua ongkos nol dengan garis mendatar atau tegak *se-efektif mungkin* sehingga diperoleh kemungkinan-kemungkinan sebagai berikut:
   - 2.1. Bila banyaknya garis penutup nol sama dengan jumlah baris (kolom) maka tabel optimal ke langkah 3.
   - 2.2. Bila banyaknya garis penutup nol kurang dari jumlah baris(kolom) maka tabel belum optimal, sehingga perlu memperbaiki tabel dengan cara sebagai berikut:

     Setiap ongkos yang belum tertutup garis dikurangi dengan ongkos positif terkecil diantara mereka sedangkan ongkos yang tertutup 2 garis (perpotongan garis) harus ditambah dengan ongkos terkecil tadi. Ulangi langkah 2.
3. Jika tabel sudah optimal dapat diikuti langkah berikut:
   - 3.1. Carilah baris (kolom) yang hanya memuat satu ongkos nol. Ongkos nol tersebut dipilih kemudian baris dan kolomnya dicoret.
   - 3.2. Sisa ongkos nol yang belum dicoret selanjutnya diproses seperti langkah 3.1.

Contoh:

Tabel I (Dengan menggunakan Metode Penugasan tentukanlah biaya optimalnya !)

	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	1	4	6	3
P_2	9	7	10	9
P_3	4	5	11	7
P_4	8	7	8	5

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut :

*) Pilih ongkos terkecil dalam setiap baris yaitu baris-1 adalah C_{11} = 1, baris-2 adalah C_{22} = 7, baris-3 adalah c_{31} = 4 dan baris-4 adalah c_{44} = 5. Kemudian setiap ongkos dikurangi dengan ongkos terkecil dalam masing-masing baris, sehingga diperoleh:

Tabel II

0	3	5	2
2	0	3	2
0	1	7	3
3	2	3	0

Jumlah garis penutup ongkos nol = 3 < 4, berarti tabel belum optimal.

*) Pilih ongkos yang tidak tertutup garis yang paling kecil, yaitu $C_{32} = 1$. Untuk ongkos yang tidak tertutup garis dikurangi dengan 1 dan yang tertutup 2 garis ditambah dengan 1, sehingga tabelnya menjadi:

Tabel III

0	2	4	1
3	0	3	2
0	0	6	2
4	2	3	0

Jumlah garis penutup nol = 3 < 4, tabel belum optimal, ulangi lagi perhitungan, diperoleh tabel sebagai berikut :

Tabel IV

0	2	1	1
3	0	0	2
0	0	3	2
4	2	0	0

Jumlah garis penutup ongkos nol = 4 *sama dengan* jumlah baris(kolom). Jadi tabel sudah optimal.

Tabel Optimalnya adalah sebagai berikut:

1 →	0	2	1	1
	3	0	0	2
3 →	0	0	3	2
	4	2	0	0
	↑	↑		
	4	*2*		

*) Pilih baris (kolom) dalam tabel optimal yang hanya memuat satu ongkos nol, dipilih baris-1 yaitu di sel (1,1) sehingga baris-1 dan kolom-1 ditutup (dicoret). Selanjutnya dipilih kolom (baris) yang tersisa yang tidak tertutup garis yang hanya memuat satu nol, yaitu kolom-4 pada sel (4,4), maka kolom-4 dan baris-4 ditutup (dicoret). Dipilih lagi baris-3 yaitu sel (3,2), kemudian baris-3 dan kolom-2 ditutup, dan akhirnya ongkos nol yang tersisa adalah pada sel (2,3).

Tabel sudah memberikan penugasan optimal, yaitu sel (1,1), (2,3), (3,2) dan (4,4), sehingga biaya optimal : $Z = C_{11} + C_{23} + C_{32} + C_{44} = 1 + 10 + 5 + 5 = 21$ (Harga C_{ij} dari tabel I).

Jadi : P_1 ditugaskan kepada M_1.
P_2 ditugaskan kepada M_3.
P_3 ditugaskan kepada M_2.
P_4 ditugaskan kepada M_4.

Dengan biaya minimumnya adalah 21 satuan.

Contoh Soal:

1. Suatu perusahaan mempunyai 3 lokasi gudang yakni F_A, F_B, F_C yang akan didistribusikan ke 3 kota W_1, W_2, W_3. Kapasitas gudang F_A, F_B, F_C masing-masing adalah sebagai berikut 20, 80 dan 15 satuan. Sedangkan keperluan dari kota W_1, W_2, W_3 masing-masing adalah 75, 20, 50 satuan. Ongkos angkut per unit produk tersebut adalah Rp.1.000,-. Adapun tabel ongkos produk tersebut adalah sebagai berikut:

	W_1	W_2	W_3
F_A	5	1	7
F_B	6	4	6
F_C	3	2	5

Tentukanlah biaya minimumnya !

2. Sebuah perusahaan restoran swalayan (fast-food) ingin membangun 4 buah toko di daerah perkotaan Chicago. Di masa lampau, perusahaan ini telah menggunakan enam perusahaan bangunan yang berbeda dan merasa puas dengan hasil kerja masing-masing perusahaan ini. Karena itu ia menawarkan mereka tiap-tiap pekerjaan ini. Tawaran akhir (dalam ribuan dolar) diperlihatkan dalam tabel berikut:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
T_1	85.3	88	87.5	82.4	89.1	86.7
T_2	78.9	77.4	77.4	76.5	79.3	78.3
T_3	82	81.3	82.4	80.6	83.5	81.7
T_4	84.3	84.6	86.2	83.3	84.4	85.5

Karena perusahaan fast-food ini ingin keempat buah kedai siap secepat mungkin, maka ia akan menghadiahkan paling tinggi satu pekerjaan bagi satu perusahaan bangunan. Penetapan yang manakah yang akan menghasilkan biaya total minimum bagi perusahaan fast-food ini?

Bila kita menolong orang lain,
suatu saat kita akan ditolong,
waktunya mungkin besok, atau
seratus tahun lagi.
Itulah hukum alam yang sangat matematis, yakni ***selalu ada keseimbangan***

Pertemuan ke-13
TEKNIK PENJADWALAN PROYEK

5.1 PENDAHULUAN

Pengelolaan proyek-proyek berskala besar yang berhasil memerlukan perencanaan, penjadwalan, dan pengkoordinasian yang hati-hati dari berbagai aktivitas yang saling berkaitan. Untuk itu maka pada tahun 1950 telah dikembangkan prosedur formal yang didasarkan pada penggunaan network (jaringan) dan teknik-tekniknya. Prosedur tersebut dikenal sebagai PERT (Program Evaluation and Review Technique) dan CPM (Critical Path Methode), yang diantara keduanya terdapat beberapa perbedaan penting. Namun kecenderungan dewasa ini adalah menggabungkan kedua prosedur ini dengan yang biasa dikenal sebagai PERT-*type system.* Tujuan sistem ini adalah :

1. untuk menentukan probabilitas tercapainya batas waktu proyek.
2. menentukan kegiatan mana pada suatu proyek yang merupakan *bottlenecks* (menentukan waktu penyelesaian seluruh proyek) sehingga dapat diketahui pada kegiatan mana kita harus bekerja keras agar jadwal dapat terpenuhi.
3. mengevaluasi akibat dari perubahan program dan akibat dari penyimpangan pada jadwal proyek.

5.2 SIMBOL –SIMBOL YANG DIGUNAKAN

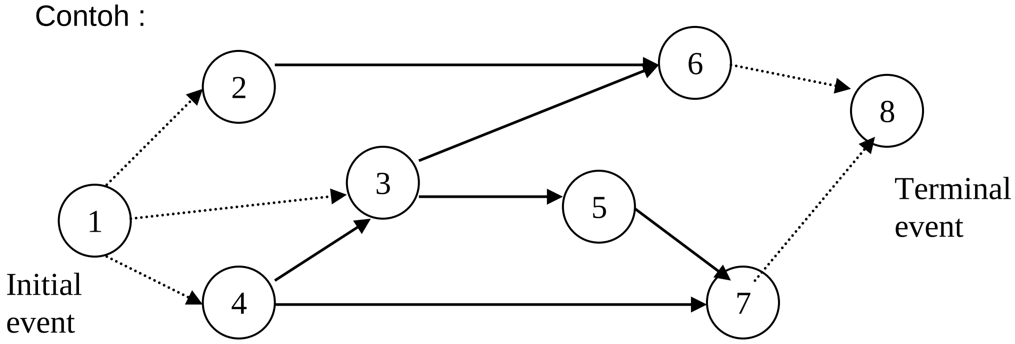
Dalam menggambarkan suatu network digunakan tiga buah simbol yaitu:

1. anak panah : menyatakan sebuah kegiatan atau aktivitas. Kegiatan yaitu hal yang memerlukan durasi (waktu tertentu) dan pemakaian sejumlah resources (sumber tenaga,peralatan,material, biaya). Panjang dan kemiringan anak panah tidak mempunyai arti, jadi tidak perlu menggunakan skala. Kepala anak panah menjadi pedoman arah kegiatan.
2. lingkaran kecil (node) : menyatakan sebuah kegiatan/ peristiwa/ event. Kegiatan adalh ujung atau pertemuan dari satu atau beberapa kegiatan.
3. anak panah terputus-putus : menyatakan kegiatan semu atau dummy yang berarti tidak mempunyai durasi karena tidak memakai resources. Dummy berguna untuk membatasi mulainya kegiatan.

Pada pelaksanaannya simbol-simbol ini digunakan menurut aturan:

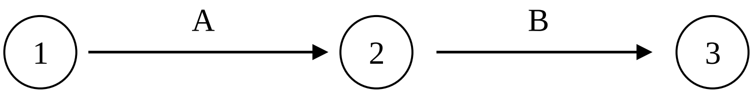
1. Diantara dua event yang sama hanya boleh digambarkan satu anak panah.
2. Nama suatu aktivitas dinyatakan dengan huruf atau nomor event.
3. Aktivitas harus mengalir dari event bernomor rendah ke event bernomor tinggi.
4. Network hanya mmiliki sebuah initial event dan sebuah terminal event.

Contoh :



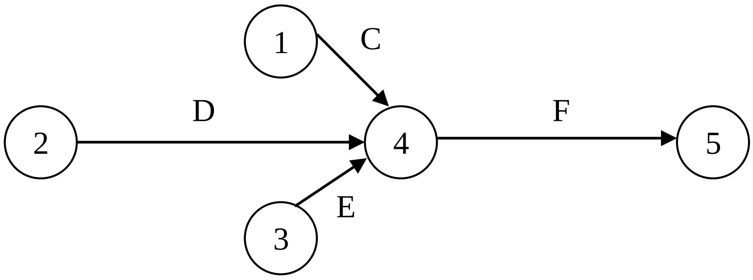
Adapun logika kebergantungan kegiatan-kegiatan itu dinyatakan sebagai berikut:

1. Jika kegiatan A harus diselesaikan dahulu sebelum kegiatan B dapat dimulai, maka hubungan antara kedua kegiatan tersebut dapat digambarkan sebagai:

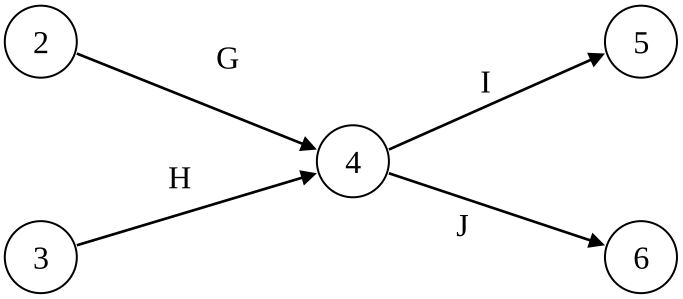


   Kegiatan A bisa juga ditulis (1,2) dan kegiatan B (2,3)

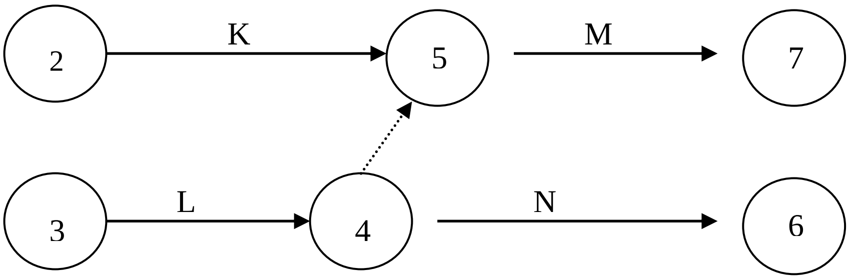
2. Jika kegiatan C, D, dan E harus selesai sebelum kegiatan F dapat dimulai, maka:



3. Jika kegiatan G dan H harus selesai sebelum kegiatan I dan J, maka:

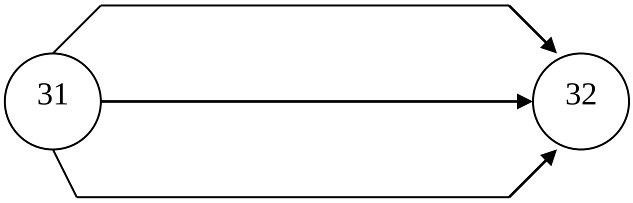


4. Jika kegiatan K dan L harus selesai sebelum kegiatan M dapat dimulai, tetapi kegiatan N sudah boleh dimulai bila kegiatan L sudah selesai, maka:

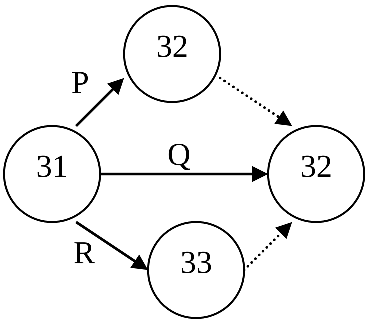


Fungsi *dummy* di atas adalah memindahkan seketika itu juga (sesuai dengan arah panah) keterangan tentang selesainya kegiatan L dari lingkaran kejadian no. 4 ke lingkaran kejadian no. 5.

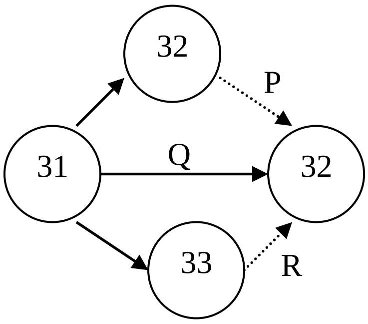
5. Jika kegiatan P, Q, dan R mulai dan selesai pada lingkaran kejadian yang sama, maka kita tidak boleh menggambarkannya sebagai:



Karena gambar di atas berarti bahwa kegiatan (31, 32) itu adalah kegiatan P atau Q atau R.
Untuk membedakan ketiga kegiatan itu masing-masing maka harus digunakan *dummy* sebagai berikut:



atau



Kegiatan	P	= (31,32)		P	= (32,34)
	Q	= (31,34)	atau	Q	= (31,34)
	R	= (31,33)		R	= (33,34)

Dalam hal ini tidak menjadi soal di mana saja diletakkannya dummy-dummy tersebut, pada permulaan ataupun pada akhir kegiatan-kegiatan tersebut.

5.3 PENENTUAN WAKTU

Setelah network suatu proyek dapat digambarkan, langkah berikutnya adalah mengestimasi waktu yang diperlukan untuk masing-masing aktivitas, dan menganalisis seluruh diagram network untuk menentukan waktu terjadinya masing-masing kejadian (event).

Dalam mengestimasi dan menganalisis waktu ini, akan kita dapatkan satu atau beberapa lintasan tertentu dari kegiatankegiatan pada network tersebut yang menentukan jangka waktu penyelesaian seluruh proyek. Lintasan-ini disebut lintasan kritis (critical path). Di samping lintasan kritis ini terdapat lintasanlintasan lain yang mempunyai jangka waktu yang lebih pendek daripada lintasan kritis. Dengan demikian, maka lintasan yang tidak kritis ini mempunyai waktu untuk bisa terlambat, yang dinamakan float.

Float memberikari sejumlah kelonggaran waktu dan elastisitas pada sebuah network, dan ini dipakai, pada waktu penggunaan network dalam praktek, atau digunakan pada waktu mengerjakan penentuan jumlah material, peralatan, dan tenaga kerja Float ini terbagi atas dug jenis, yaitu total float dan free-float. (Penjelasan mengenai kedua jenis float ini akan diberikan kemudian).

5.3.1 Notasi yang Digunakan

Untuk memudahkan perhitungan penentuan waktu ini.digunakan notasi-notasi sebagai berikut:

TE	=	earliest event occurence time, yaitu saat tercepat terjadinya event.
TL	=	latest event occurence time, yaitu saat paling lambat terjadinya event.
ES	=	earliest activity start time, yaitu saat tercepat dimulainya aktivitas.
EF	=	earliest activity finish time, yaitu saat tercepat diselesaikannya aktivitas.
LS	=	latest activity start time, yaitu saat paling lambat dimulainya activitas.
LF	=	latest activity finish time, yaitu saat paling lambat diselesaikannya aktivitas.
t	=	activity duration time, yaitu waktu yang diperlukan untuk suatu aktivitas (biasa dinyatakan dalam hari).
S	=	total slack/total float.
SF	=	free slack/free float.

5.3.2 Asumsi dan Cara Perhitungan

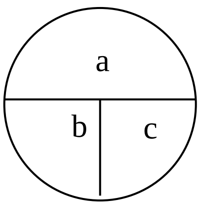
Dalam melakukan perhitungan penentuan waktu ini digunakan tiga buah asumsi dasar, yaitu:

1. Proyek hanya memiliki satu initial event dan satu terminal even t,
2. Saat tercepat terjadinya initial event adalah hari ke-nol.
3. Saat paling lambat terjadinya terminal event adalah TL = TE untuk event ini.

Adapun cara perhitungan yang harus dilakukan terdiri atas dua cara, yaitu cara perhitungan maju (*forward computation*). Pada perhitungan mundur (*backward computation*). Pada perhitungan maju, perhitungan bergerak mulai dari initial event menuju ke terminal event. Maksudnya ialah menghitung saat yang paling cepat terjadinya events dan saat paling cepat dimulainya serfs diselesaikannya aktivitas-aktivitas (TE, ES, dan EF).

Pada perhitungan mundur, perhitungan bergerak dari terminal event menuju ke initial event. Tujuannya ialah untuk menghitung saat paling lambat terjadinya events dan saat paling lambat dimulainya dan diselesaikannya aktivitas-aktivitas (TL, U dan LF). Dengan selesainya kedua perhitungan ini, barulah float dapat dihitung.

Untuk melakukan perhitungan maju dan perhitungan mundur ini, lingkaran kejadian (event) dibagi atas tiga bagian sebagai berikut:



a	=	ruang untuk nomor event
b	=	ruang untuk menunjukkan saat paling cepat terjadinya event (TE), yang juga merupakan hasil perhitungan maju.
c	=	ruang untuk menunjukkan saat paling lambat terjadinya event (TL), yang juga merupakan hasil perhitungan mundur.

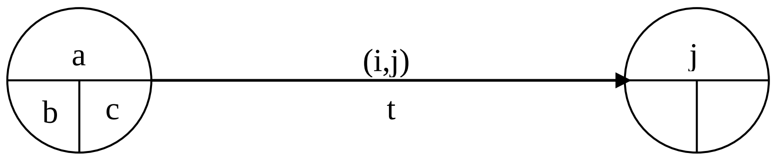
Dengan demikian, setelah diagram network yang lengkap dari suatu proyek selesai digambarkan, dan setiap node telah dibagi menjadi tiga bagian seperti di atas, maka mulailah memberi nomor pada masing-masing node. Setelah itu, cantumkan pada setiap anak panah (kegiatan) perkiraan waktu pelaksanaan masing-masing.

Letak angka yang menunjukkan waktu pelaksanaan masing-masing kegiatan ini biasanya di bawah anak panah. Satuan waktu yang digunakan pada seluruh network harus sama, misalnya jam, hari, minggu, dan lain-lain. Apabila perhitungan dilakukan dengan tidak menggunakan komputer, maka sebaiknya duration ini menggunakan angka-angka yang bulat.

5.4 PERHITUNGAN MAJU

Ada tiga langkah yang dilakukan pada perhitungan maju, yaitu:

1. Saat tercepat terjadinya initial event ditentukan pada hari ke-nol, sehingga untuk initial event berlaku TE = O. (Asumsi ini tidak benar untuk proyek yang berhubungan dengan proyek-proyek lain).
2. Kalau initial event terjadi pada hari yang ke-nol, maka

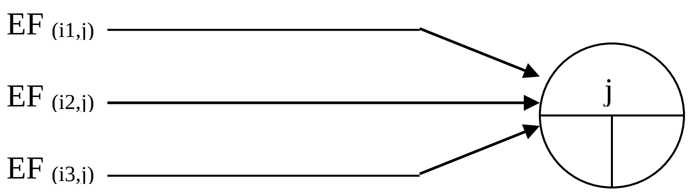


$$ES_{(i,j)} = TE\ M = 0$$

$$EF_{(i.j)} = ES_{(i.j)} + t_{(i.j)}$$

$$= TE_{(i)} + t_{(i,j)}$$

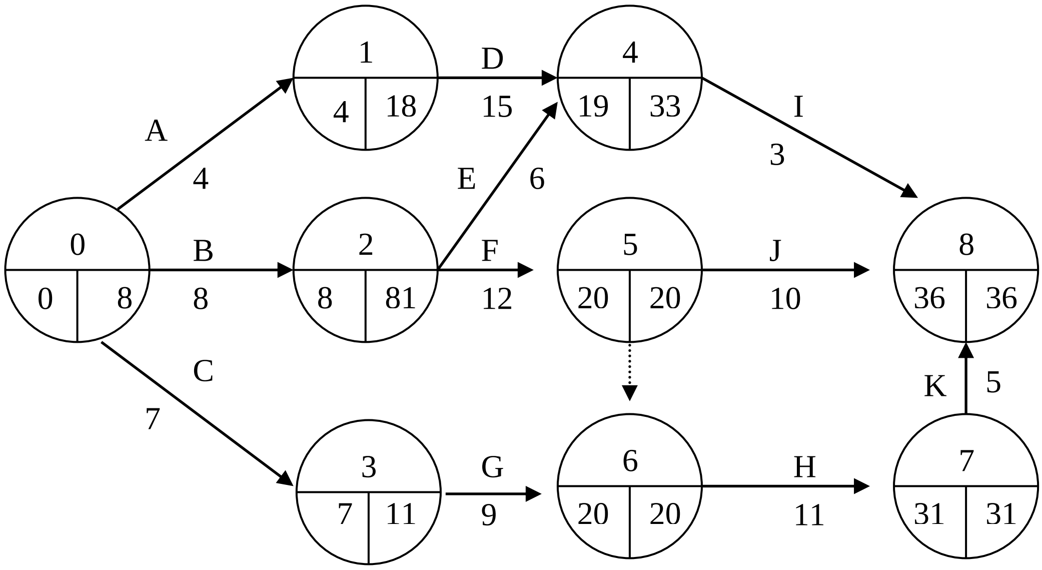
3. Event yang menggabungkan beberapa aktivitas (merge event)



Sebuah event hanya dapat terjadi jika aktivitas-aktivitas yang mendahuluinya telah diselesaikannya. Maka saat paling cepat terjadinya sebuah event sama dengan nilai terbesar dari saat tercepat untuk menyelesaikan aktivitas-aktivitas yang berakhir pada event

$TE(j) = \max (ED_{(i1,j)}, EF_{(i2,j)}, \ldots m\ EF_{(jn,j)})$

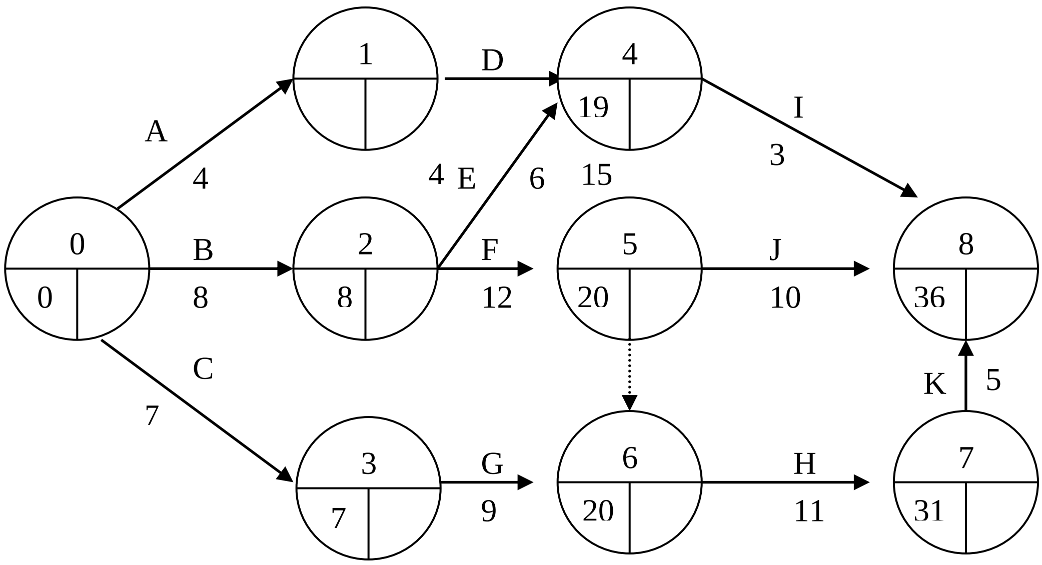
Contoh :



Misalkan satuan waktu yang digunakan adalah hari. Waktu pelaksanaan (duration) kegiatan A adalah 4 hari, sehingga tercepat diselesaikannya aktivitas A adalah pada hari keempat atau $EF_{(0,1)}$ = 4. Karena aktivitas A ini adalah satu-satunya aktivitas yang memasuki *node* 1, maka saat tercepat terjadinya event nomor 1 juga pada hari keempat, atau $TE_{(1)}$ = 4. Maka kita masukkan angka 4 ke dalam ruang kiri bawah dari node 1. Dengan cara yang sama kita dapatkan $EF_{(0,2)}$ = 8 dan $TE_{(2)}$ = 8 sehingga kita masukkan angka 8 ke dalam ruang kiri bawah dari node 2. Berikutnya didapat $EF_{(0,3)}$ = 7 dan $TE_{(3)}$ = 7, sehingga kita masukkan angka 7 ke dalam ruang kiri bawah dari node 3.

Untuk mengisi node 4 kita harus hati-hati karena node 4 ini merupakan merge event. Dari diagram di atas kita tahu bahwa $EF_{(1,4)}$ = 4 + 15 = 19 dan $EF_{(1,4)}$ = 8 + 6 = 14. Maka $TE_{(4)}$ = maks (19,14) = 19, dan kita masukkan angka 19 pada ruang kiri bawah dari node 4. Selanjutnya kita dapatkan:

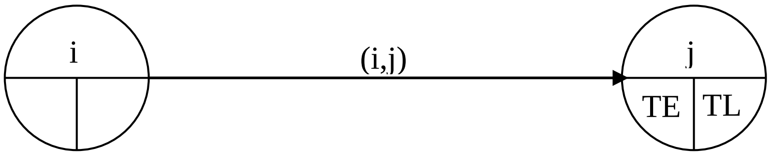
$TE_{(5)}$ = 8+12=20
$TE_{(6)}$ = maks (20,7 + 9)= 20
$TE_{(7)}$ = 31
dan terakhir $TE_{(8)}$= maks (19 + 3, 20 + 10, 31 + 5) = 36. Maka diagram network di atas menjadi.



5.5 PERHITUNGAN MUNDUR

Seperti halnya pada perhitungan maju, pada perhitungan mundur ini pun terdapat tiga langkah, yaitu:

1. Pada terminal event berlaku TL = TE.
2. Saat paling lambat untuk memulai suatu aktivitas sama dengan saat paling lambat untuk menyelesaikan aktivitas itu dikurangi dengan duration aktivitas tersebut.



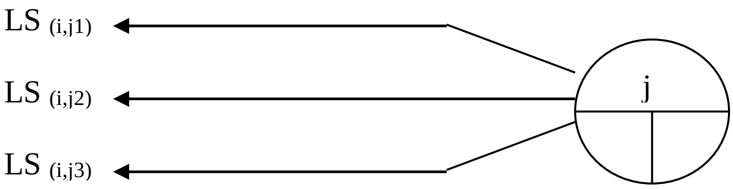
LS = LF – t

LF $_{(i.j)}$ – TL di mana TL = TE

Maka :

LS $_{(i,j)}$ = TL$_{(j)}$ – t$_{(i,j)}$

3. Event yang "mengeluarkan" beberapa aktivitas (burst event)



Setiap aktivitas hanya dapat dimulai apabila event yang mendahuluinya telah terjadi. Oleh karena itu, saat paling lambat terjadinya sebuah event sama dengan nilai terkecil dari saat-saat paling lambat untuk memulai aktivitas-aktivitas yang berpangkal pada event tersebut.

TL$_{(i)}$ = min (LS$_{(i,j1)}$, LS$_{(i,j2)}$, ... , LS$_{(i,jn)}$)

Contoh: Perhatikan diagram network hasil perhitungan maju.

Dari hasil perhitungan maju diperoleh TE(s) = 36, sehingga dengan sendirinya TL$_{(8)}$ 36. Masukkan angka 36 pada ruang kanan bawah dari node 8.

Perhatikan aktivitas K. Bila aktivitas K ini dapat diselesaikan paling lambat pada hari ke-36 dengan duration 5 hari, maka aktivitas tersebut dapat dimulai pelaksanaannya paling lambat setelah hari ke 36 - 5 = 31, sehingga TL$_{(7)}$ = 31. Dengan cara yang sama kita dapatkan TL$_{(4)}$ = 33 dan TL$_{(6)}$ = 20.

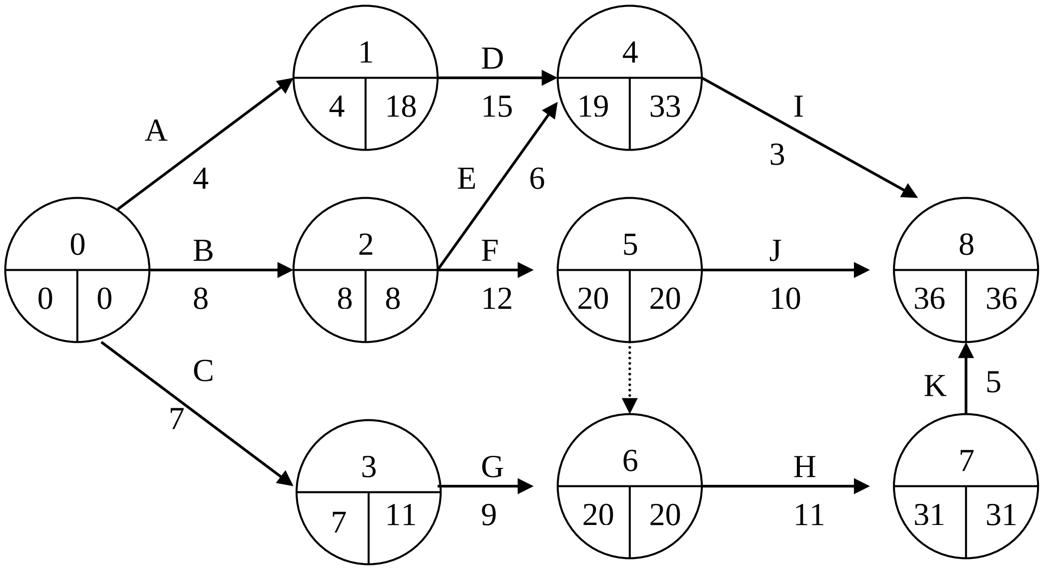
Untuk mengisi node 5 yang merupakan burst event, kita perhatikan aktivitas J dan aktivitas dummy dari node 5 ke node 6.Dari diagram di atas kita tahu bahwa LS$_{(b.s)}$ = 36 - 10 = 26 dan LS$_{(g,s)}$ = 20 - 0 = 20. Maka TL$_{(B)}$ = min (26,20) = 20, dan kita masukkan pada ruang kanan bawah dari node 5. Selanjutnya kita dapatkan:

TL$_{(1)}$ = 33-15=18

TL$_{(2)}$= min (33-6, 20-12)= 8

TL$_{(3)}$ = 20 - 9 = 11

Dan terakhir $TL_{(0)}$ = min (18-4, 8 - 8, 11 -7) = 0. Maka diagram lengkap sebagai hasil perhitungan maju dan perhitungan mundur menjadi.



Dengan demikian, maka waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan proyek dengan network seperti di atas ini adalah 36 hari.

5.6 PERHITUNGAN KELONGGARAN WAKTU (FLOAT ATAU SLACK)

Setelah perhitungan maju dan perhitungan mundur selesai dilakukan, maka berikutnya harus dilakukan perhitungan kelonggaran waktu (float/slack) dari aktivitas (i,j), yang terdiri atas total float dan free float.,

Total float adalah jumlah waktu di mans waktu penyelesaian suatu aktivitas dapat diundur tanpa mempengaruhi saat paling cepat dari penyelesaian proyek secara keseluruhan. Karena itu, total float ini dihitung dengan cara mencari selisih antara saat paling lambat dimulainya aktivitas dengan saat paling cepat dimulainya aktivitas (LS - ES), atau bisa juga dengan mencari selisih antara saat paling lambat diselesaikannya aktivitas dengan saat paling cepat diselesaikannya aktivitas (LF - EF). Dalam hal ini cukup dipilih salah satu saja.

Jika akan menggunakan persamaan S = LS - ES, maka total float aktivitas (i,j) adalah:

$S_{(i.j)} = LS_{(i,j)} - ES_{(i,j)}$

Dari perhitungan mundur kita tahu bahwa $LS_{(i,j)} = TL_{(j)} - t_{(i,j)}$. Sedangkan dari perhitungan maju $ES_{(i,j)} = TE_{(i)}$. Maka :

$S_{(i,j)} = TL_{(j)} - t_{(i,j)} - TE_{(i)}$

Jika akan menggunakan persamaan S = LF - EF, maka total float aktivitas (i,j) adalah:

$S_{(i,j)} = LF_{(i,j)} - EF_{(i,j)}$

Dari perhitungan maju kita tahu bahwa $EF_{(i,j)} = TE_{(i)} + t_{(j)}$. Sedangkan dari perhitungan mundur $LF_{(i,j)} = TL_{(j)}$. Maka:

$S_{(i,j)} = TL_{(j)} - TE_{(i)} - t$

Yang dimaksud dengan free float adalah jumlah waktu di mana penyelesaian suatu aktivitas dapat diukur tanpa mempengaruhi saat paling cepat dari dimulainya aktivitas yang lain atau saat paling cepat terjadinya event lain pada network.

Free float aktivitas (i,j) dihitung dengan cara mencari selisih antara saat tercepat terjadinya event di ujung aktivitas dengan saat tercepat diselesaikannya aktivitas (i,j) tersebut. Atau:

$SF_{(i,j)} = TE(j) - EF_{(i,j)} = TE(j) - TE(i) - t(i,j)$

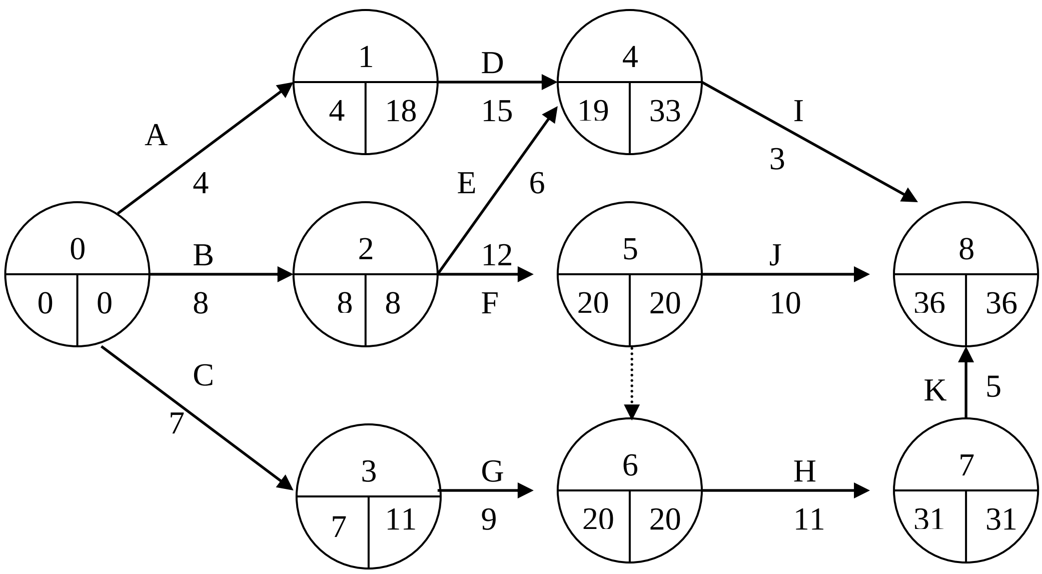
Dari perhitungan maju didapat EF(ij) = TE(i) + t(i,j) maka:

Contoh: Perhatikan diagram network terakhir, yang merupakan hasil perhitungan maju dan perhitungan mundur.

Aktivitas A :	$S_{(0,1)}$	= 18 – 0 – 4	= 14
	$Sf_{(0,1)}$	= 4 – 0 – 4	= 0
Aktivitas B :	$S_{(0,2)}$	= 8 – 0 – 8	= 0
	$Sf_{(0,2)}$	= 8 – 0 – 8	= 0
Aktivitas C :	$S_{(0,3)}$	= 11 – 0 – 7	= 4
	$Sf_{(0,3)}$	= 7 – 0 – 7	= 0
Aktivitas D :	$S_{(1,4)}$	= 33 – 4 – 15	= 14
	$Sf_{(1,4)}$	= 19 – 4 – 15	= 0
Aktivitas E :	$S_{(2,4)}$	= 33 – 8 – 6	= 19
	$Sf_{(2,4)}$	= 19 – 8– 6	= 5
Aktivitas F :	$S_{(2,5)}$	= 20 – 8 – 12	= 0
	$Sf_{(2,5)}$	= 20 – 8 – 12	= 0
Aktivitas G :	$S_{(3,6)}$	= 20 – 7 – 9	= 4
	$Sf_{(3,6)}$	= 20 – 7 – 9	= 4
Aktivitas H :	$S_{(3,7)}$	= 31 – 20 – 11	= 0
	$Sf_{(3,7)}$	= 31 – 20 – 11	= 0
Aktivitas I :	$S_{(4,8)}$	= 36 – 19 – 3	= 14
	$Sf_{(4,8)}$	= 36 – 19 – 3	= 14
Aktivitas J :	$S_{(5,8)}$	= 36 – 20 – 10	= 6
	$Sf_{(5,8)}$	= 36 – 20 – 10	= 6
Aktivitas K :	$S_{(7,8)}$	= 36 – 31 – 5	= 0
	$Sf_{(7,8)}$	= 36 – 31 – 5	= 0

Suatu aktivitas yang tidak mempunyai kelonggaran (float) disebut aktivitas kritis. Dengan kata lain, aktivitas kritis mempunyai S = SF = 0. Pada contoh di atas, aktivitas kritisnya adalah aktivitas-aktivitas B, F, H, dan K.

Aktivitas-aktivitas kritis ini akan membentuk lintasan kritis yang biasanya dimulai dari initial event sampai ke terminal event. Walaupun demikian, lintasan kritis ini bisa juga bersifat parsial. Pada contoh di atas, lintasan kritisnya adalah lintasan yang melalui node 0, 2, 5, 6, 7, dan 8. Biasanya pada network digambarkan sebagai garis tebal sebagai berikut:



Bila waktu merupakan faktor yang sangat menentukan bagi ke• berhasilan proyek, maka lintasan kritis inilah yang perlu dikendalikan.

Perhitungan untuk menentukan lintasan kritis ini dapat dirangkum dalam suatu tabel yang memuat seluruh informasi yang diperlukan untuk membuat peta waktu (time-chart) pelaksanaan proyek. Tabel tersebut adalah sebagai berikut:

Aktivitas (i,j)	Duration $t_{(i,j)}$	Paling cepat		Paling lambat		Total float S	Free float SF
		Mulai	Selesai	Mulai	Selesai		
		ES	EF	LS	LF		
(0,1)	4	0	4	0	18	14	0
(0,2)	8	0	8	0	8	0	0*)
(0,3)	7	0	07	0	11	4	0
(1,4)	15	4	19	18	33	14	0
(2,4)	6	8	19	8	33	19	5
(2,5)	12	8	20	8	20	0	0*)
(3,6)	9	7	20	11	20	4	4
(4,8)	3	19	36	33	36	14	14
(5,6)	0	20	20	20	20	0	0*)
(5,8)	10	20	36	20	36	6	6
(6,7)	11	20	31	20	31	0	0*)
(7,8)	5	31	36	31	36	0	0*)

*) aktivitas kritis

Pertemuan ke-14

5.7 PEMBUATAN PETA WAKTU DAN PENGATURAN SUMBER

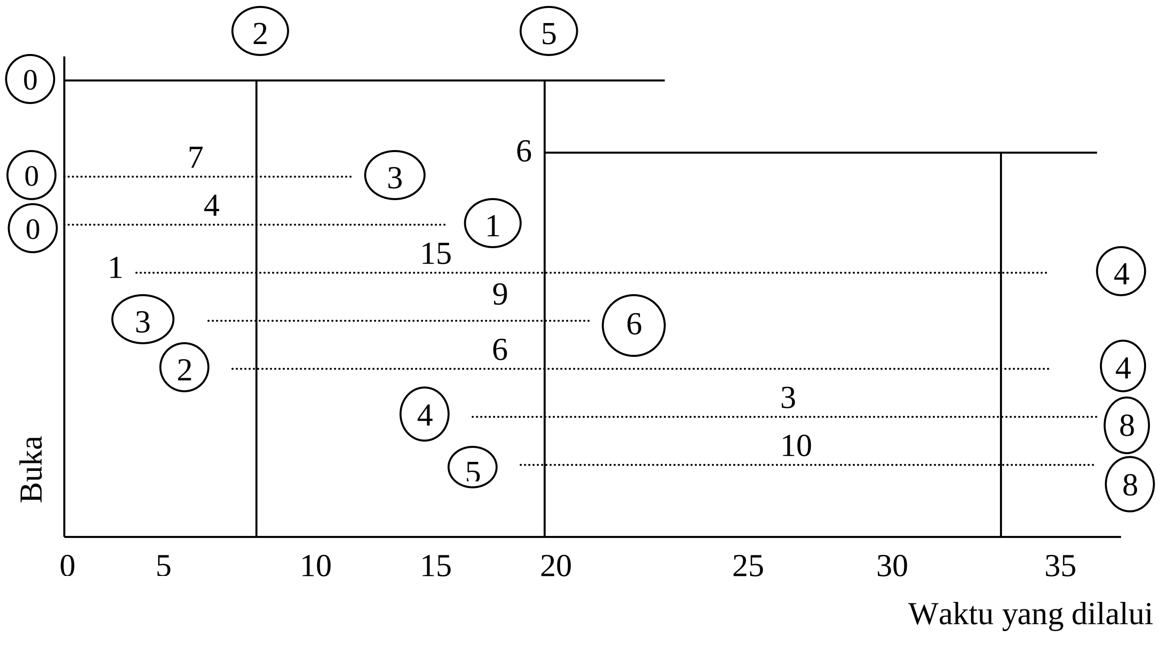
Sebagai langkah terakhir dari perhitungan network ini adalah membuat peta waktu yang merupakan jadwal pelaksanaan proyek. Peta ini harus dibuat dengan memperhatikan batasan-batasan dari sumber yang dapat digunakan, karea tidak mungkin beberapa aktivitas dapat diselesaikan sekaligus mengingat terbatasnya tenaga kerja dan peralatan.

Pada saat pembuatan peta waktu ini, kita akan memanfaatkan *total float* aktivitas-aktivitas yang tidak kritis untuk digunakan dalam pengaturan sumber yang diperlukan. Caranya ialah dengan menggeser-geser aktivitas yang tidak kritis ini (ke depan atau ke belakang) dalam batas waktu maksimum yang dapat digunakannya. Untuk membuat peta ini, kita dapat melihat langsung pada diagram network-nya atau pada tabel seperti di atas.

Langkah pertama pembuatan peta ini ialah membuat sebuah garis lurus mendatar yang akan menggambarkan satuan waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan setiap aktivitas dari proyek yang diamati. Gambarkanlah jadwal aktivitas-aktivitas yang kritis terlebih dahulu, mulai dari TE pada node awal (= 0) hingga TE pada node akhir (= 36).

Berikutnya gambarkanlah aktivitas-aktivitas yang tidak kritis, yang dimulai dari ES hingga LF masing-masing. Aktivitas-aktivitas yang kritis ini digambarkan sebagai garis penuh dan saling bersambungan, sedangkan aktivitas-aktivitas yang tidak kritis digambarkan sebagai garis putus-putus dan terpisah satu sama lain (dilgambarkan sendiri-sendiri). Hal ini untuk menandakan bahwa aktivitas-aktivitas tersebut dapat dijadwalkan di mana saja asal masih di dalam jangka waktunya masing-masing, dengan syarat bahwa logika kebergantungan setiap aktivitas tidak terganggu.

Gambar berikut ini adalah peta waktu dari contoh soal yang telah kita bahas, di mana aktivitas dummy (5,6) digambarkan sebagai garis vertikal, sebagai tanda bahwa aktivitas ini tidak menggunakan waktu.



Angka-angka yang dilingkari menyatakan nomor node, sedangkan angka-angka di atas garis putus-putus menyatakan duration dari masing-masing aktivitas yang tidak kritis.

Peranan total float dan free float dalam penjadwalan aktivitas-aktivitas yang tidak kritis ini mengikuti dua aturan umum sebagai berikut:

1. Jika total float sama dengan free float, maka aktivitas-aktivitas yang tidak kritis dapat dijadwalkan di mana saja, di antara ES dan LF-nya masing-masing.
2. Jika free float lebih kecil dari total float, maka saat dimulainya aktivitas yang tidak kritis ini dapat diundur relatif terhadap saat tercepat dimulainya aktivitas tersebut. Lamanya pengunduran waktu ini tidak boleh lebih dari besarnya free float, sehingga penjadwalan dari aktivitas-aktivitas yang berikutnya tidak terganggu. Pada contoh di atas, aturan yang kedua ini berlaku bagi aktivitas-aktivitas (0,1), (0,3), (1,4), dan (2,4), sedangkan aktivitas-aktivitas yang lainnya mengikuti aturan yang pertama.

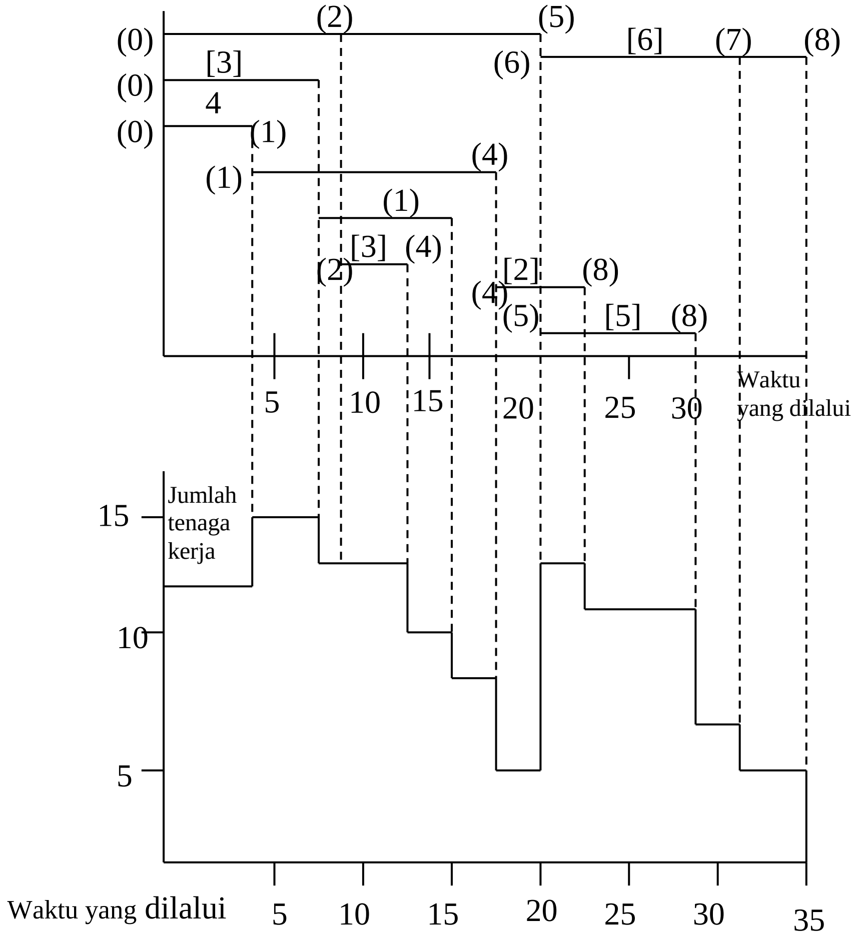
Karena aktivitas-aktivitas (0,1), (0,3), dan (1,4) free floatnya adalah nol, maka aktivitas-aktivitas tersebut tidak boleh diundur pelaksanaannya. Dengan kata lain, harus dimulai pada ES masing-masing. Sedangkan aktivitas (2,4) yang mempunyai free float = 5, maka aktivitas ini dapat dimulai pada hari ke-8 (ES-nya), atau diundur hingga paling lama pada hari ke-13 (ES SF-nya) hingga dapat selesai maksimum pada hari ke-19. Dengan demikian, saat tercepat dimulainya aktivitas (4,8) yang merupakan aktivitas berikutnya tidak akan terganggu. Jadi, free float yang berharga nol untuk suatu aktivitas yang tidak kritis ini adalah suatu tanda bahwa saat dimulainya satu atau beberapa aktivitas di depannya (aktivitas yang berikutnya) akan bergantung pada saat diselesaikannya,aktivitas yang tidak kritis tersebut.

Tujuan dari pengaturan jadwal pelaksanaan aktivitas-aktivitas dalam suatu proyek ini ialah agar dapat memperkecil sumber maksimum yang dibutuhkan. Sayang sekali, hingga saat ini belum ada suatu teknik matematis yang berhasil dikembangkan untuk memperoleh solusi optimum dari pengaturan sumber ini. Untuk mengatasinya, maka digunakan program heuristik dengan memanfaatkan floats yang berbeda untuk masing-masing aktivitas yang tidak kritis.

Misalkan kita akan menentukan banyaknya orang yang diperlukan untuk menyelesaikan proyek pada contoh soal terdahulu. Jika data kebutuhan orang untuk setiap aktivitas adalah sebagai berikut:

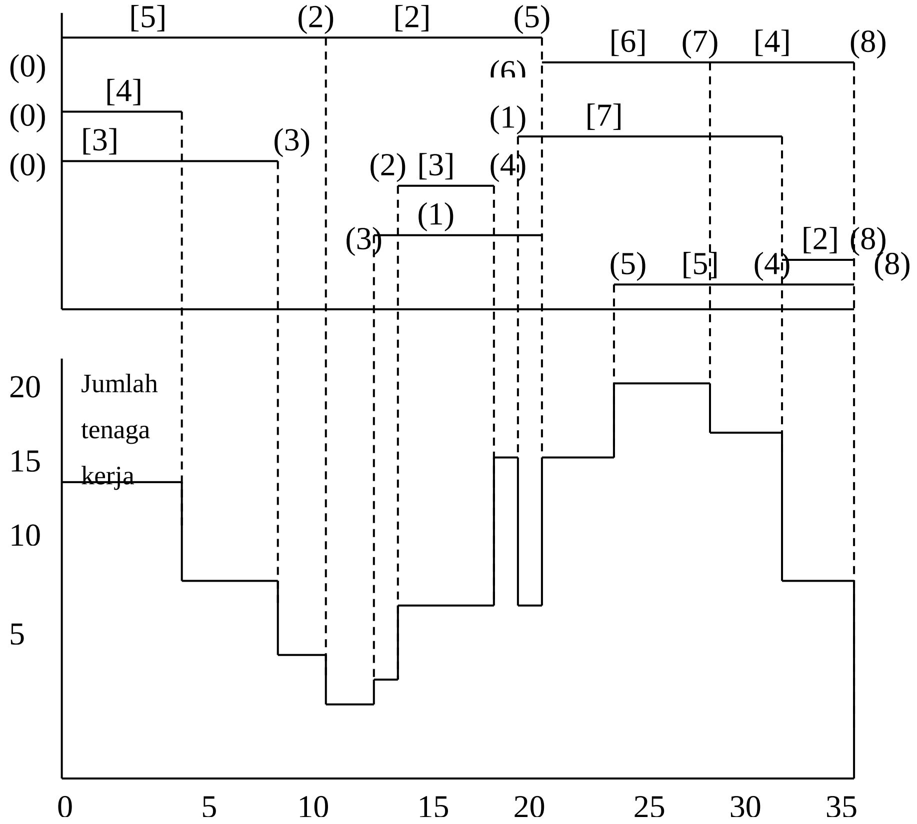
Aktivitas	Jumlah orang	Aktivitas	Jumlah orang
(0,1)	4	(3,6)	1
(0,2)	5	(4,8)	2
(0,3)	3	(5,8)	5
(1,4)	7	(6,7)	6
(2,4)	3	(7,8)	4
(2,5)	2		

Maka apabila aktivitas-aktivitas yang tidak kritis dijadwalkan secepat mungkin, jumlah maksimum tenaga kerja yang dibutuhkan adalah sebanyak 15 orang, seperti terlihat pada gambar berikut:



(Angka di dalam tanda kurung menyatakan jumlah tenaga kerja yang diperlukan untuk masing-masing aktivitas.)

Sedangkan apabila aktivitas-aktivitas yang nonkritis dijadwalkan selambat mungkin, maka jumlah maksimum tenaga kerja yang membutuhkan adalah 18 orang, seperti terlihat pada gambar di bawah ini:



Pembagian kebutuhan tenaga kerja pada setiap periode waktu penyelesaian aktivitas-aktivitas ini dapat agak diperhalus (fluktuasinya diperkecil) dengan cara mengatur jadwal pelaksanaan masing-masing aktivitas. Tentu saja, hal ini dapat dilakukan sepanjang aturan tentang float tetap diperhatikan.

5.8 PERKIRAAN WAKTU PENYELESAIAN SUATU AKTIVITAS (DURATION TIME).

Sampai saat ini kita telah menggunakan data waktu penyelesaian suatu aktivitas (duration) sebagai dasar perhitungan waktu dan penjadwalan proyek. Tetapi, bagaimanakah cara memperkirakan waktu yang dibutuhkan oleh aktivitas-aktivitas tersebut?

Ada dua cara yang biasa digunakan untuk memperkirakan (mengestimasi) waktu penyelesaian suatu aktivitas ini, yaitu:

1. Single duration estimate atau perkiraan waktu tunggal untuk setiap aktivitas. Cara ini dapat dilakukan apabila duration dapat diketahui dengan akurat dan tidak terlalu berfluktuasi. Pendekatan CPM (Critical Path Method) menggunakan cara ini karena CPM beranggapan bahwa setiap fluktuasi dapat diatasi dengan fungsi kontrol.
2. Triple duration estimate, yaitu cara perkiraan waktu yang didasarkan atas tiga jenis duration sebagai berikut:

   T_o = optimistic duration

   yaitu waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan suatu aktivitas jika tidak terjadi kesalahan pada pelaksanaan aktivitas itu (segala sesuatunya berjalan baik sekali).

   T_m = most likely duration

yaitu waktu yang paling sering terjadi bila aktivitas dilakukan berulang-ulang (dalam kondisi normal).

T_p = pessimistic duration

yaitu waktu yang dibutuhkan bila terjadi kesalahan pada pelaksanaan aktivitas yang bersangkutan.

Cara ini merupakan dasar perhitungan untuk PERT yang mempunyai asumsi dasar bahwa jika suatu aktivitas dilakukan berkali-kali, maka actual times (waktu nyata untuk menyelesaikan aktivitas itu) akan membentuk distribusi frekuensi Beta, di mana optimistic dan pessimistic duration merupakan buntut (tail), sedangkan most likely duration adalah mode dari distribusi Beta tersebut.

Rentangan (range) ditentukan oleh T_o dan T_p. Most likely duration (T_m) tidak harus berimpit dengan titik tengah ($T_o + T_p$)/2, tetapi dapat terjadi di sebelah kiri atau kanannya.

Selanjutnya diasumsikan bahwa suatu pendekatan dari duration rata-rata yang disebut expected duration (σ^2 dan T_e) diberikan dengan formula:

$T_e = (T_o + 4T_m + T_p)/6$

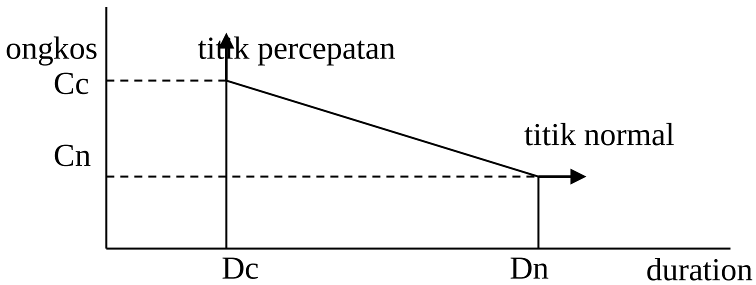
$\sigma^2 = ((T_p - T_o)/6)^2$

Kedua besaran di atas yaitu T_e (mean/waktu yang diharapkan) dan σ^2 (standar deviasi) digunakan untuk mengetahui probabilitas penyelesaian proyek pada waktu tertentu.

5.9 PENENTUAN ONGKOS DALAM PENJADWALAN PROYEK

Dalam penjadwalan proyek, aspek ongkos diperhitungkan dengan membuat hubungan ongkos dengan duration untuk setiap aktivitas pada proyek itu. Yang dimaksud dengan ongkos di sini ialah ongkos langsung saja, tidak termasuk ongkos-ongkos administrasi, supervisi, dan lain-lain.

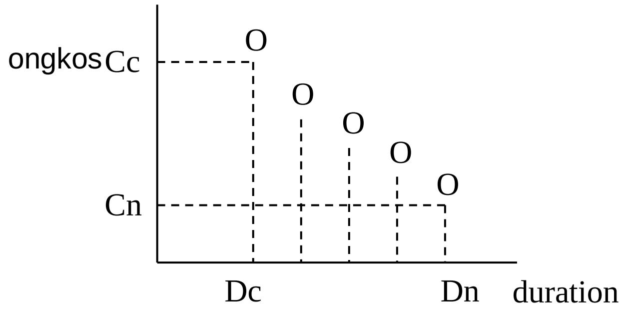
Kebanyakan proyek menggambarkan hubungan ongkos dengan duration ini sebagai garis lurus sebagai berikut:



Titik (D_n, C_n) menyatakan hubungan duration D dengan ongkosnya C, jika aktivitas diselesaikan dalam kondisi normal. Duration D_n ini dapat dipersingkat dengan cara meningkatkan pengalokasian sumber yang dengan sendirinya berarti meningkatkan ongkos langsung.

Ada suatu batas yang dinamakan crash time (batas waktu percepatan) yang menyatakan bahwa pengurangan waktu berikutnya (yang melampaui batas ini) tidak akan efektif lagi. Pada titik ini, setiap peningkatan sumber hanya akan meningkatkan ongkos tanpa mengurangi durationnya. Titik percepatan (crash point) pada gambar di atas dinyatakan oleh titik (D_c, C_c).

Garis lurus yang menghubungkan (D_n, C_n) dengan (D_c, C_c) ini sebetulnya hanya untuk mempermudah penunjukan masing-masing aktivitas pada titik normal dan titik percepatannya. Jika hubungan itu tidak linier, maka perhitungannya akan sulit, kecuali jika hubungan yang tidak linier ini dapat didekati dengan garis-garis patah yang lurus seperti pada gambar berikut ini:

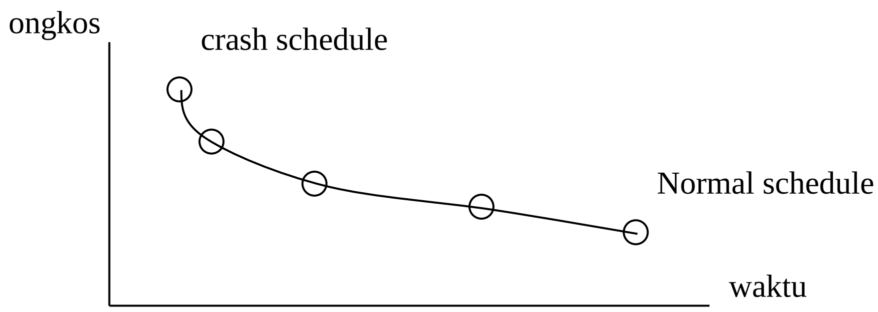


Pada kondisi semacam ini, aktivitas dapat dipecah menjadi sejumlah subaktivitas yang masing-masing berkorespondensi dengan salah sata segmen garis di atas. Perhatikanlah peningkatan kemiringan segmen-segmen garis, yang bergerak dari titik normal ke titik percepatannya. Jika kondisi ini tidak terpenuhi, maka pendekatan di atas tentunya menjadi tidak valid.

Setelah hubungan ongkos dengan waktu ini ditentukan, selesaikanlah aktivitas-aktivitas proyek dalarn duration normalnya. Kemudian tentukan lintasan kritis dan ongkos langsungnya. Langhah berikutnya ialah mempertimbangkan pengurangan duration. Karena pengurangan waktu ini hanya akan efektif jika duration aktivitas-aktivitas kritis yang dikurangi, maka yang perlu diperhatikan adalah aktivitas-aktivitas kritis itu saja. Agar diperoleh pengurangan duration dengan ongkos sekecil mungkin, maka kita bebas menekan sebanyak mungkin aktivitas-aktivitas kritis yang mempunyai kemiringan garis ongkos - waktu terkecil.

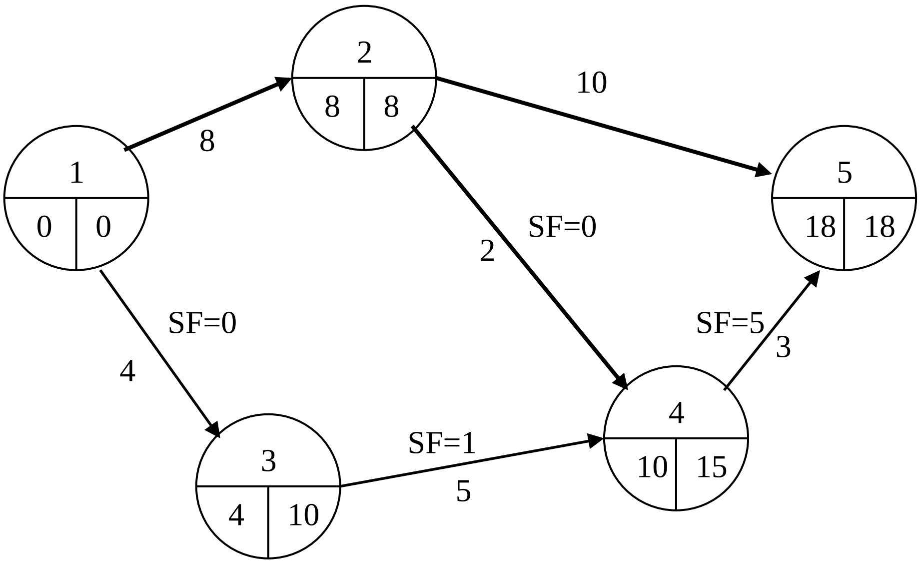
Banyaknya aktivitas yang dapat ditekan ini dibatasi oleh crash time masing-masing. Namun, batasan-batasan lain batas juga diperhitungkan sebelum menetapkan jumlah aktivitas yang, pasti dapat dipersingkat. Sebagai hasil penekanan suatu aktivitas ini ialah jadwal beta yang mungkin mempunyai lintasan kritis beta pula. Ongkos jadwal beta ini tentunya lebih besar dari jadwal sebelumnya. Dari jadwal beta ini kite pilih aktivitas-aktivitas kritis dengan kemiringan terkecil untuk dipercepat pelaksanaannya. Prosedur ini diulangi hingga seluruh aktivitas kritis berada pada crash time masing-masing.

Hasil akhir dari perhitungan ini adalah suatu kurva yang menunjukkan hubungan ongkos dengan waktu untuk berbagai jadwal dan ongkos-ongkos yang bersangkutan, seperti gambar berikut ini:



Contoh

Perhatikan network berikut ini :



Data waktu dan ongkos untuk masing-masing aktivitas adalah:

Aktivitas (i,j)	Normal		Dipercepat	
	Duration	Ongkos	Duration	Ongkos
(1,2)	8	100	6	200
(1,3)	4	150	2	350
(2,4)	2	50	1	90
(2,5)	10	100	5.	400
(3,4)	5	100	1	200
(4,5)	3	80	1	100

Analisis dari persoalan ini akan bergantung pada kemiringan garis ongkos - waktu untuk berbagai aktivitas. Kemiringan garis tersebut dinyatakan sebagai:

$$\text{Kemiringan} = \frac{C_c - C_n}{D_n - D_c}$$

Dengan menggunakan rumus ini, maka untuk aktivitas-aktivitas dari network di atas diperoleh:

Aktivitas	Kemiringan
(1,2)	50
(1,3)	100
(2,4)	40
(2, 5)	60
(3,4)	25
(4,5)	10

Sebagai langkah pertama prosedur perhitungannya ialah mengasumsikan bahwa seluruh aktivitas terjadi pada waktu (duration) normal. Dari network di atas dapat dilihat bahwa perhitungan lintasan kritisnya adalah berdasarkan kondisi normal dengan aktivitas (1,2) dan (2, 5) sebagai aktivitas-aktivitas yang membentuk lintasan kritis. Waktu penyelesaian proyek ini adalah 18 dengan ongkos 580.

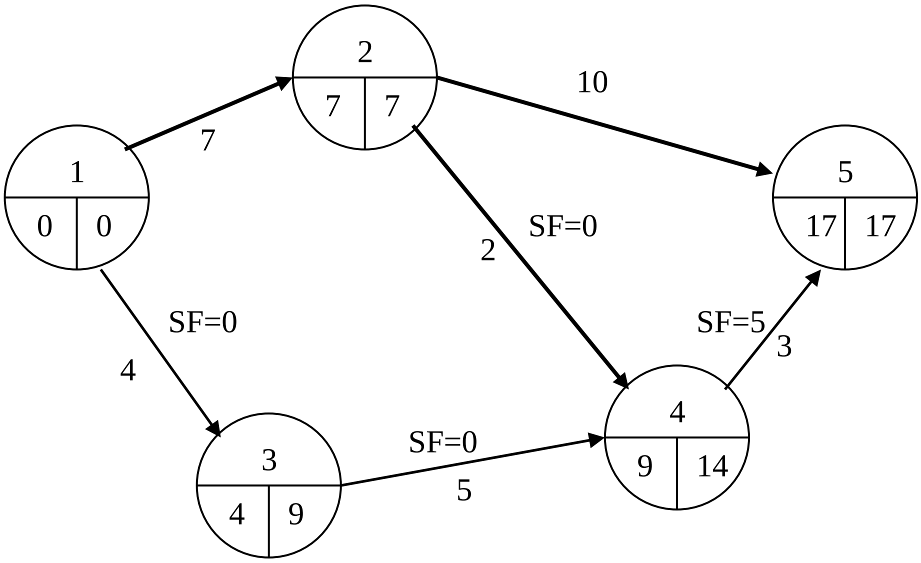
Langkah berikutnya adalah mengurangi waktu penyelesaian proyek dengan menekan sebanyak mungkin aktivitas-aktivitas kritis yang mempunyai kemiringan terkecil. Pada network di atas hanya ada dua aktivitas kritis, yaitu aktivitas (1,2) dan (2,5).

Karena aktivitas (1,2) mempunyai kemiringan yang lebih kecil, maka aktivitas ini dipilih sebagai aktivitas yang akan ditekan waktu penyelesaiannya. Berdasarkan tabel hubungan ongkos dengan waktu di atas, aktivitas (1,2) ini dapat ditekan sebanyak 2 satuan waktu, suatu batas yang ditentukan oleh titik percepatannya (oleh sebab itu disebut sebagai betas percepatan atau crash limit). Namun, penekanan aktivitas kritis hingga titik percepatan (crash point) ini tidaklah berarti bahwa duration proyek ini akan berkurang dengan jumlah yang sama. Hal ini disebabkan karena pada saat aktivitas kritis ini ditekan, mungkin terjadi suatu lintasan kritis baru. Apabila hal ini terjadi, maka lintasan kritis yang lama tidak usah diperhatikan lagi, tetapi perhatikanlah lintasan kritis yang baru.

Salah satu cara untuk memprediksi apakah lintasan kritis yang baru itu akan terjadi sebelum mencapai titik percepatan ataukah tidak, ialah dengan memperhatikan free float dari aktivitas-aktivitas yang tidak kritis. Seperti telah dijelaskan, free float ini bersifat independen terhadap saat dimulainya aktivitas-aktivitas yang lain. Maka, apabila pada saat dilakukan penekanan terhadap aktivitas kritis terjadi pengurangan harga free float dari positif menjadi nol, aktivitas kritis itu tidak boleh ditekan tanpa melakukan pemeriksaan lebih lanjut, karena ada kemungkinan bahwa aktivitas dengan free float limit ini menjadi aktivitas kritis. Dengan demikian, selain crash limit kita juga harus memperhatikan free float limit.

Untuk menentukan free float limit ini, pertama-tama kurangilah duration dari aktivitas kritis terpilih (berdasarkan slope-nya) sebanyak satu satuan waktu. Maka, dengan menghitung ulang nilai-nilai dari seluruh aktivitas yang tidak kritis, akan dapat dilihat aktivitas-aktivitas mana yang free float-nya telah berkurang sebanyak satu satuan waktu juga. Nilai free float terkecil (sebelum dilakukan pengurangan) dari seluruh aktivitas semacam itulah yang dimaksud sebagai free float limit.

Pada network kita di atas, harga-harga free float (SF) masing-masing aktivitas telah dicantumkan. Perhatikan sekarang bahwa dengan mengurangi duration dari aktivitas. (1,2) sebanyak satu satuan waktu akan menurunkan SF dari aktivitas (3,4) dari semula berharga 1 menjadi nol. SF dari aktivitas (4,5) tetap berharga 5. Dengan demikian, maka SF limit = 1. Karena crash limit dari (1,2) adalah 2, maka batas penekanannya (compression limit) sama dengan nilai minimum crash limit dengan SF limit-nya, yaitu min (2,1) = 1. Sampai di sini, diperoleh penjadwalan yang baru sebagai berikut:

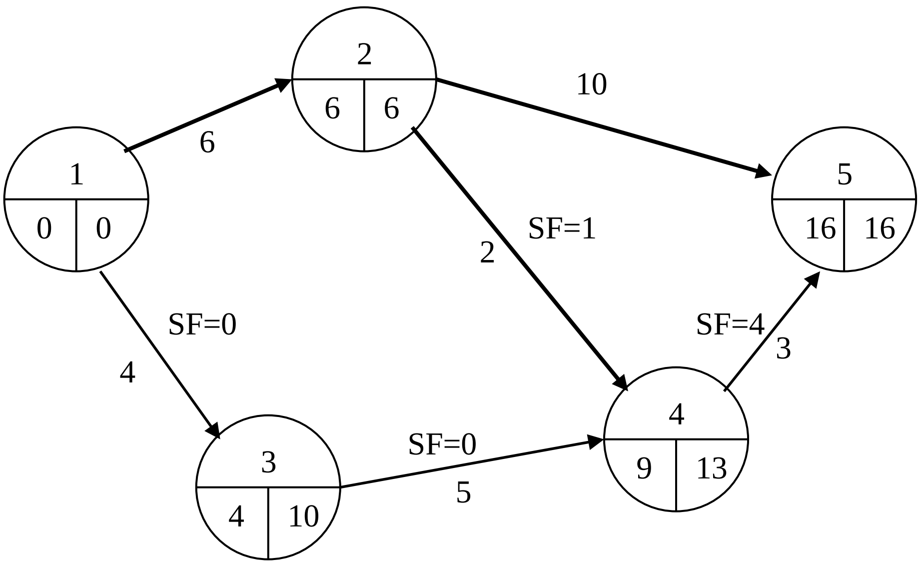


Duration dari proyek keseluruhan = 1.7

Ongkos baru = ongkos pada penjadwalan sebelumnya + ongkos penekanan waktu
= 580 + (18 - 17) * 50
= 630

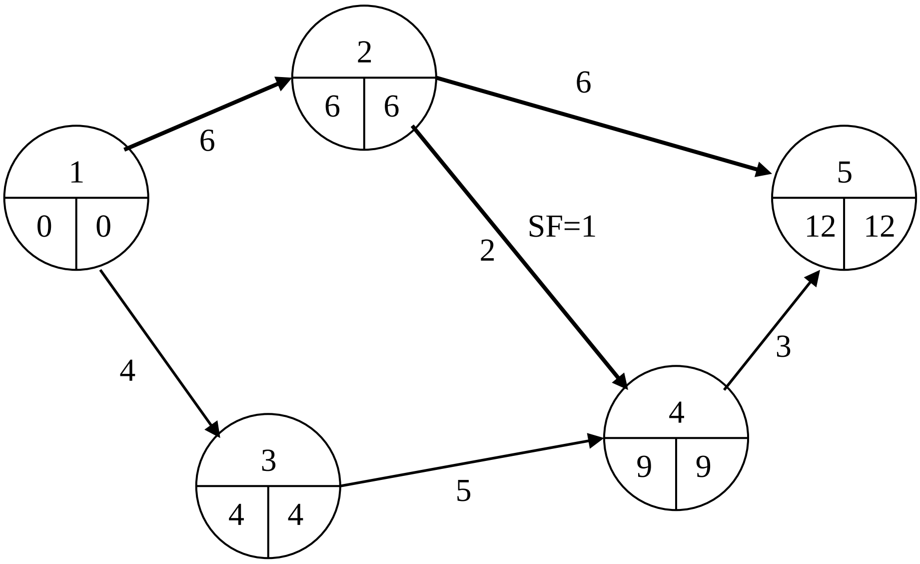
Lintasan kritis tetap, yaitu (1,2,5).

Karena aktivitas (1,2) ini masih merupakan aktivitas kritis terpilih untuk dipercepat, maka lakukanlah lagi perhitungan crash limit dan SF limit-nya. Namun, karena crash-limit-nya sama dengan 1, maka kita tidak perlu SF limit-nya, karena sudah pasti bahwa harga SF positif yang terkecil adalah sama dengan 1 juga. Dengan demikian, aktivitas (1,2) ditekan sebanyak satu satuan waktu, sehingga diperoleh penjadwalan baru sebagai berikut:



Duration proyek = 16
Ongkos = 630 + (17=16) 50 = 680
Lintasan kritis tetap, yaitu (1,2,5).

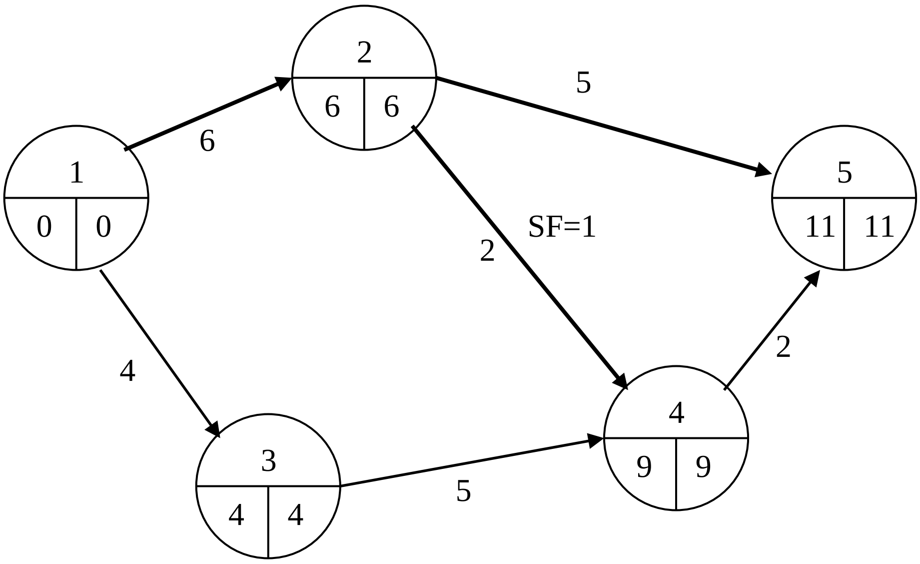
Sekarang, aktivitas (1,2) sudah'tidak dapat dipercepat lagi karena telah mencapai crash limit-nya. Karena lintasan kritisnya tetap, yaitu (1,2,5), maka tinggallah aktivitas (2,5) yang harus dipercepat. Aktivitas (2,5) ini mempunyai crash limit = 10 - 5 = 5. Dari penjadwalan yang terakhir kita lihat bahwa pada saat aktivitas (1,2) ditekan sebanyak 1 satuan waktu, maka hanya ada satu aktivitas tidak kritis yang SF-nya berharga positif• dan berkurang sebanyak 1 satuan waktu juga. Aktivitas tersebut adalah (4,5), di mana SF-nya berkurang dari 5 menjadi 4. Maka tidak ada pilihan lain kecuali menetapkan bahwa SF limit-nya adalah 4. Dengan demikian compression limit untuk aktivitas (2,5) adalah min (5,4) = 4, dengan hasil penjadwalan baru sebagai berikut:



Duration proyek = 12
Ongkos = 680 + (16-12) 60 = 920
Lintasan kritis ada dua, yaitu (1,2,5) dan (1,3,4,5).

Munculnya dua lintasan kritis ini inenunjukkan bahwa untuk mengurangi waktu penyelesaian proyek, pengurangan harus dilakukan terhadap kedua lintasan kritis itu secara bersamaan. Kita tahu bahwa dari lintasan (1,2,5), aktivitas (2,5) dapat dikurangi sebanyak 1 satuan waktu (semula 3, sudah dikurangi 4), sedangkan dari lintasan (1,3,4,5), aktivitas (4,5) terpilih sebagai aktivitas yang akan ditekan (karena slope-nya terkecil), dengan crash limit-nya sebesar 2 satuan waktu. Dengan demikian, maka crash limit untuk kedua lintasan kritis itu min (1,2) = 1. SF-limit untuk kasus semacam ini ditentukan oleh harga minimum dari SF-limit yang diperoleh dari perhitungan masing-masing lintasan kritis secara terpisah. Namun, karena pada persoalan di atas crash limit-nya sama dengan 1, maka SF-limit dengan sendirinya tidak perlu dihitung.

Penjadwalan baru dari perhitungan ini adalah:

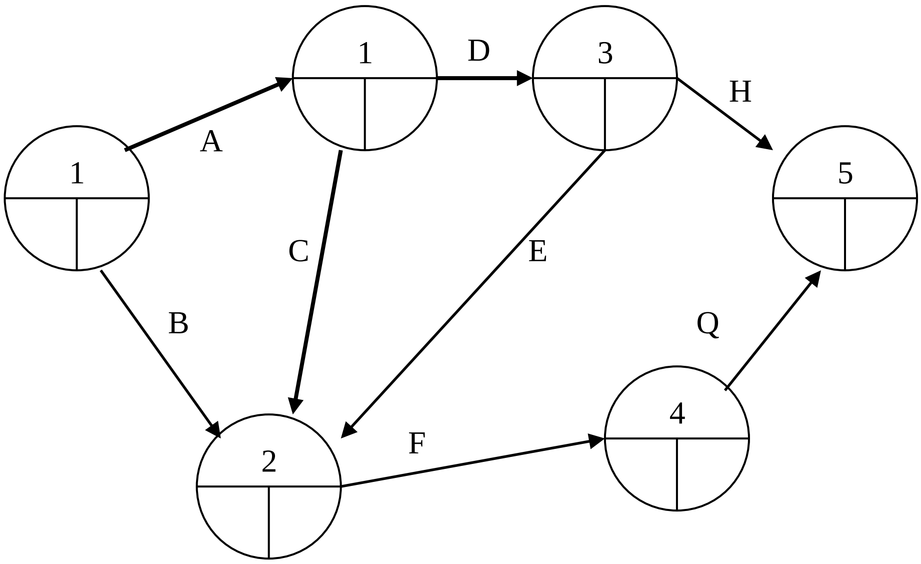


Duration proyek = 11
Ongkos = 920 + (12-11)(60 + 10) = 990
Slope (2,5) slope (4,5).
Lintasan kritis tetap ialah (1,2,5) dan (1,3,4,5)

Karena seluruh aktivitas pada lintasan kritis (1,2,5) telah mencapai crash time-nya, maka tidak mungkin lagi dilakukan pengurangan terhadap waktu penyelesaian proyek ini, sehingga perhitungan selesai.

Contoh Soal:

1) Dari suatu proyek diperoleh data sebagai berikut:
   a. Buatlah diagram network-nya.
   b. Tentukan lintasan kritis serta waktu penyelesaian proyek ini.
2) Perhatikan network berikut ini:



Kegiatan	Normal		Percepatan	
	waktu	ongkos	waktu	ongkos
A	4	210	3	280
B	8	400	6	560
C	6	500	4	600
D	9	540	7	600
E	5	500	2	1100
F	5	150	4	240
G	3	150	3	150
H	7	600	6	750

Aktivitas	Durasi		Ongkos	
	Normal	Crash	Normal	Crash
A	6	4	100	120
B	4	3	80	93
C	5	4	95	110
D	7	7	115	115
E	4	2	64	106
F	8	6	75	99
G	18	13	228	318

Tentukanlah:

a. Waktu penyelesaian normal dan ongkosnya.
b. Waktu penyelesaian tercepat dan ongkosnya.

3) Sebuah rumah sakit mempunyai laboratorium pemeriksaan hematology. Prosedur yang berlaku dalam kegiatan pemeriksaan di laboratorium tersebut adalah sebagai berikut:

Aktivitas	Waktu yang dibutuhkan (menit)
1-2	4
2-3	2
2-4	1
3-4	5
3-6	6
4-5	15
5-6	5
6-7	9

Hitunglah TE, TL dan Slack untuk setiap kejadian!

4) Untuk menyelesaikan suatu pekerjaan diperlukan kegiatan-kegiatan sebagai berikut:

Aktivitas	To (menit)	Tm (menit)	Tp (menit)
1-2	1	4	7
1-3	2	4	5
2-4	1	2	4
2-5	3	5	12
3-4	1	2	4
3-6	2	4	5
4-7	1	4	7
5-7	2	4	6
6-7	1	2	4

a. Tentukan waktu yang diharapkan (T_e) dan standard deviasi untuk setiap aktivitas.
b. Tentukan lintasan kritisnya.
c. Berapa probabilitas bahwa pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dalam 15 menit.
d. Bila probabilitas pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dalam waktu t menit adalah = 99%. Berapakah harga t?

5) Pemerintah akan membangun sebuah jembatan. Dari analisis sebuah konsultan diperoleh data-data sebagai berikut:

Aktivitas	Waktu yang diperlukan (minggu)		Ongkos (Rp. 1.000,00)	
	Normal	Crash	Normal	Crash
1 – 2	16	14	1.500	2.000
1 – 3	25	20	2.000	2.500
2 – 4	10	7	2.500	4.000
3 – 4	32	26	1.000	1.600
3 – 5	40	35	1.750	2.250
4 – 5	16	12	4.000	6.000
4 – 6	12	8	3.000	4.200
5 – 6	9	6	1.500	3.000

a. Tentukan lintasan kritis normal
b. Tentukan lintasan kritis crash
c. Tentukan waktu penyelesaian terpendek dengan penam

6) Untuk menyelesaikan suatu proyek diperlukankegiatan-kegiatan sebagai berikut:

Aktivitas	Waktu yang diperlukan (minggu)		Ongkos (Rp. 1000,00)	
	Normal	Crash	Normal	Crash
1 – 2	3	2	100	1500
2 – 3	4	2	2000	4000
2 – 4	4	3	2500	3500
3 – 5	3	1	1500	2500
4 – 5	4	2	6000	12000
5 – 6	6	3	2000	5000

a. Bila dana yang tersedia adalah Rp 24.000.000,00 berapa minggu waktu minimum yang dibutuhkan?
b. Bila proyek tersebut ingin diselesaikan dalam 12 minggu. Berapa dngkos minimum yang diperlukan?