Sistem Persamaan linier

Persamaan linier

Definisi

N buah variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang dinyatakan dalam bentuk :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

disebut persamaan linier, dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil.

Sekumpulan nilai/ harga sebanyak n yang disubtitusikan ke n variable : $a_1=k_1, x_2=k_2 \ldots x_n=k_n$ sedemikian sehingga persamaan tersebut terpenuhi, maka himpunan nilai tersebut $(k_1, k_2, \ldots k_n)$ disebut himpunan penyelesaian (solusi set).

Contoh

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

$x_1=1; x_2=0; x_3=1 \Rightarrow (1,0,1)$ solusi

$x_1=0; x_2=5; x_3=0 \Rightarrow (0,5,0)$ solusi

$x_1=2; x\ =1; x_3=0 \Rightarrow (2,1,0)$ solusi

suatu persamaan linier bisa mempunyai solusi >1.

Definisi

Sebuah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier didalam n variable: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut sistem persamaan linier.

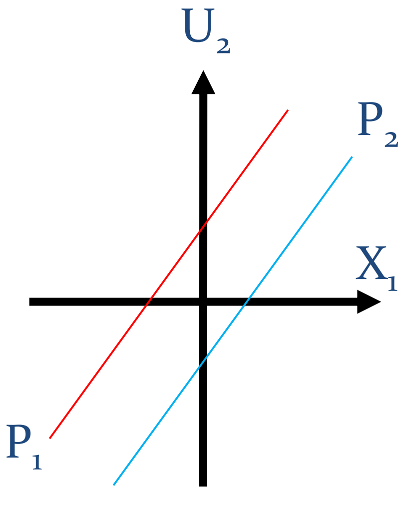
Sistem persamaan linier yang tidak mempunyai solusi disebut inconsisten. Sedangkan sistem persamaan linier yang mempunyai paling sedikit sebuah solusi disebut consisten.

Misal ada 2 persamaan dengan 2 variabel.

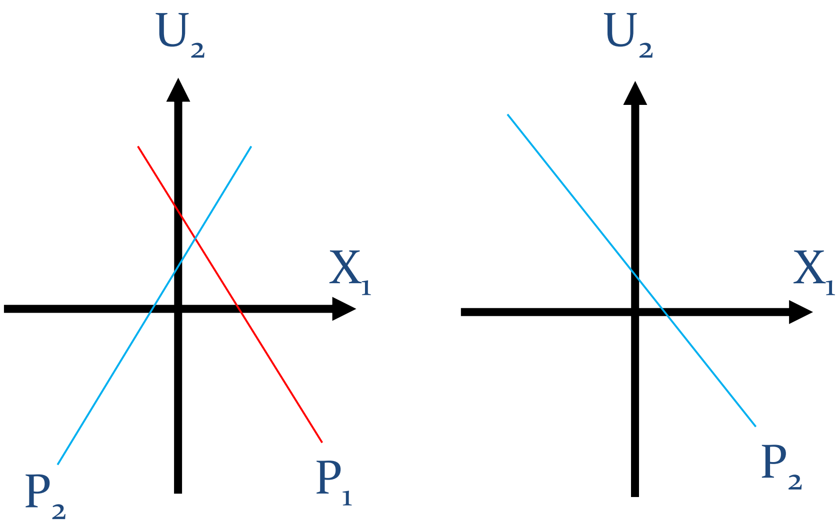
$$P_1: a_1x_1 + a_2x_2 = b_1 \; (a_{1,} \, a_2 \neq 0)$$

$$P_2: a_1x_1 + a_2x_2 = b_2 \; (c_{1,} \, c_2 \neq 0)$$

Jika kedua persamaan tersebut dinyatakan dalam grafik, maka:



Inconsisten



Konsisten

Penyajian SPL dengan persamaan matriks

SPL umum:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

matriks koefisien

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{Ax = b}
$$

Penyajian SPL sebagai matriks augmented

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \quad = b_1$$

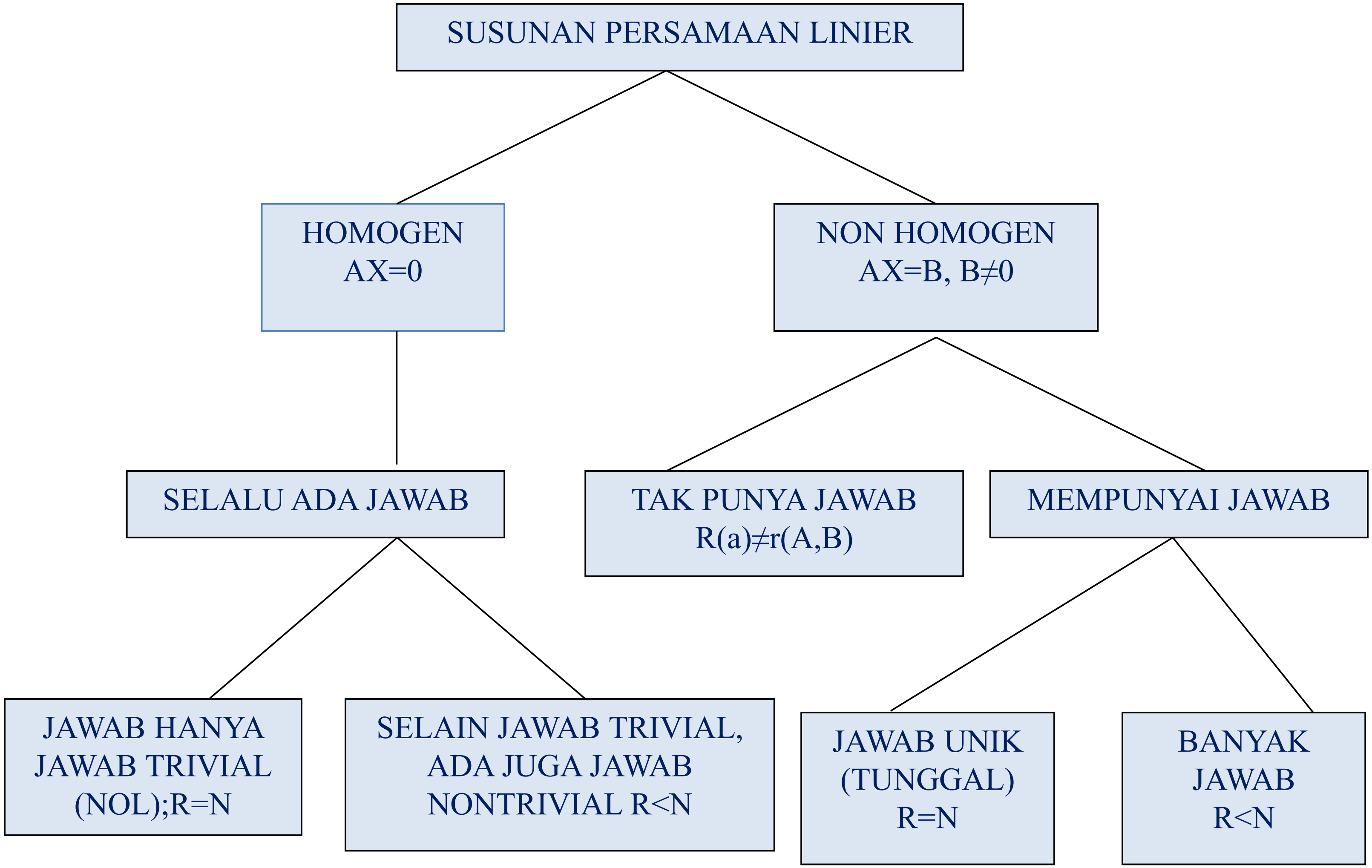
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \quad = b_2$$

:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matriks augmented



Untuk menyelesaikan persamaan linier menggunakan metode ”Gauss. Jordan” yaitu: merubah matriks augmented (A|B) menjadi matriks eselon terreduksi dengan cara melakukan transformasi elementer.

Sistem Persamaan Linier Non Homogen

Bentuk umum: $Ax = B$, dimana $B \neq 0$

Sistem Persamaan linier non homogen akan mempunyai jawab bila :

Rank(A) = Rank(A|B)

Contoh ;

1. carilah titik persekutuan garis. -3x+6y = -9 dengan garis. x-2y = 3

Jawab:

$-3x+6y=-9$

$x-2y=3$

Dalam bentuk matriks=

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix} \textit{atau } \mathrm{A}\overline{\mathrm{x}} = \mathrm{B}$$

$$(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} -3 & 6 & : & -9 \\ 1 & -2 & : & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{B}_{12}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & : & 3 \\ -3 & 6 & : & -9 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{B}_{21}^{(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & : & 3 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{R(a)=r(A|B)=1} \\ \text{Jumlah variabel=2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} r<n \\ 1<2 \end{array}$$

Jadi jawabnya tidak tunggal.

Contoh

2. Selesaikan sistem persamaan linier non homogen

Di bawah ini :

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\
4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Jawab :

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}
\Rightarrow A\,\overline{x} = B
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]
\begin{array}{c} \underset{\sim}{B_{21}^{(-3)}} \\ \underset{\sim}{B_{31}^{(-4)}} \\ \underset{\sim}{B_{41}^{(-2)}} \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\underset{\sim}{B_{2}^{(-1/5)}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{B_{32}^{(11)}}{\overset{B_{12}^{(-2)}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{B_3^{(-1/6)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{B_{23}^{(-1)}}{\overset{B_{13}^{(1)}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rank (A) = R (A|B) = 3 =banyaknya variabel

Jadi jawabnya tunggal

Matriks lengkap di atas menyatakan:

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 & & x_1 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 & \text{atau} & x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 & & x_3 = 1 \end{array}$$

Sehingga sebagai penyelesaiannya : $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sistem Persamaan Linier Homogen

Bentuk umum: Ax = 0, yaitu:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\, a_{1n}\,x_n = 0$$

$$a_{21}\,x_2 + a_{22}\,x_2 + \ldots\, a_{2n}\,x_n = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}\,x_m + a_{m2}\,x_m + \ldots\, a_{mn}\,x_n = 0$$

Atau=

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{mn} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A berukuran (m x n)
Matriks x berukuran (n x 1)
Matriks 0 berukuran (m x 1)
Karena matriks lengkapnya (A|Õ) maka akan selalu berlaku rank (A)=rank (A|Õ).
Sehingga sistem persamaan linier homogen selalu mempunyai jawab (konsisten).

Contoh

1. Selesaikan sistem persamaan linier dibawah ini :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$(A\,|\,0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{B_{31}^{(-1)}}{\overset{B_{21}^{(-1)}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{B_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{B_{13}^{(-1)}}{\overset{B_{12}^{(-1)}}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga solusinya : $x_1 = 0\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = 0$

Yaitu solusi trivial atau $\overline{x} = 0$

2. Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$(A\,|\,0) = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{B_{21}^{(-1)}}{}} \, {}_{B_{31}^{(-2)}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{B_{32}^{(1)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B_2^{(1/2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B_{12}^{(-1)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Rank (A) = (A|0) = 2< n = 4
jadi solusinya tidak tunggal
(banyak)

$$x_1 + 0x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0$$

$$0x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4$$

Dimana : x_3 dan x_4 bebas.

$$\text{untuk } x_3 = a \text{ dan } x_4 = b$$

$$\text{didapat } x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b$$

Sehingga :

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2a & + & 1/2b \\ -1/2a & - & 3/2b \\ a & + & 0b \\ 0a & + & b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berlaku untuk setiap bilangan riil a & b