TRANSFORMASI LAPLACE
- PENDEKATAN UNTUK SISTEM DAN SINYAL LISTRIK

MATA KULIAH RANGKAIAN ELEKTRIK

FAKULTAS TEKNIK UDINUS 2017

APA ITU LAPLACE ?

- Transformasi Laplace adalah suatu metode operasional yang dapat digunakan untuk memudahkan menyelesaikan persamaan diferensial linier.

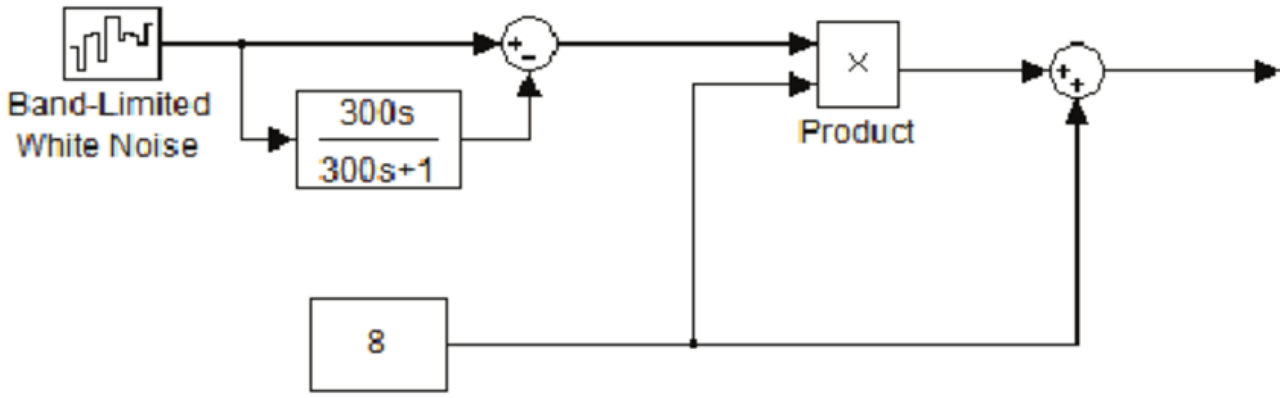
$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad \text{dengan} \qquad s = \sigma + j\omega.$$

Prosedur – prosedur transformasi :

1. Persamaan diferensial yang berada dalam kawasan waktu (t), ditransformasikan ke kawasan frekuensi (s) dengan transformasi Laplace.
2. Mengolah hasil transformasi laplace (persamaan dalam kawasan s).
3. Mengubah kembali persamaan dalam kawasan (s) menjadi kawasan waktu (t).

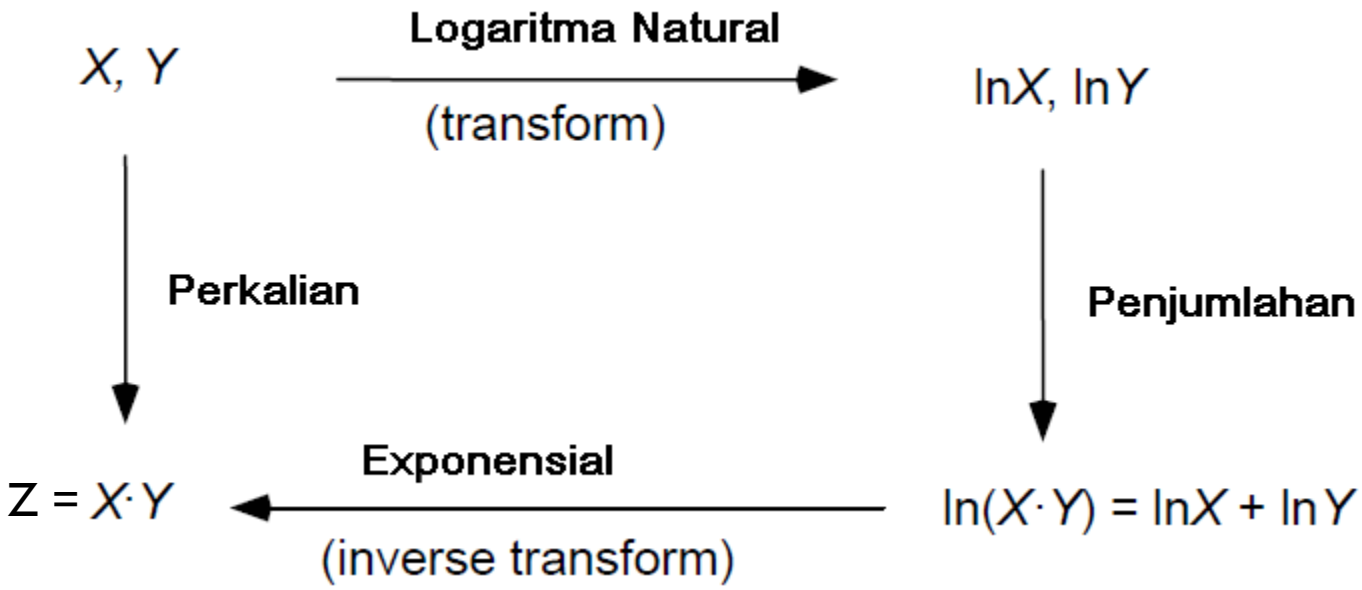
MENGAPA LAPLACE ?

- Metode untuk menyelesaikan persamaan integral dan differensial (integro differential)
- Sebagai alat yang digunakan untuk memudahkan dalam menganalisa behavior (tingkah laku) sebuah system.



ANALOGI

Diketahui sebuah nilai X dan Y. Dimana Z adalah hasil kali X dan Y maka :



LAPLACE DALAM RANGKAIAN LISTRIK

- Analisis transien menjadi lebih mudah!!
- Pengoperasian (ex. Menjumlah atau mengalikan) dua atau lebih sinyal – sinyal listrik menjadi lebih mudah!! Tidak diperlukan persamaan integral dan differensial!

CONTOH : TRANSFORMASI SINYAL ANAK TANGGA

Pernyataan sinyal anak tangga di kawasan t adalah $v(t) = Au(t)$

Transformasi Laplace dari bentuk gelombang ini adalah

$$\mathcal{L}[Au(t)] = \int_0^\infty Au(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty Ae^{-st}\, dt = -\frac{Ae^{-(\sigma + j\omega)t}}{\sigma + j\omega}\Bigg|_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{L}[Au(t)] = \frac{A}{s}}$$

CONTOH : TRANSFORMASI SINYAL EKSPONENSIAL

Transformasi Laplace bentuk gelombang eksponensial beramplitudo A, yaitu $v(t) = Ae^{-at}u(t)$, adalah

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}u(t)] = \int_0^\infty A\,e^{-at}u(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty Ae^{-(s+a)t} = -\frac{Ae^{-(s+a)t}}{s+a}\Bigg|_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{L}[Ae^{-at}u(t)] = \frac{A}{s+a}}$$

SIFAT – SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE
I. KOMBINASI LINEAR

1. Kombinasi Linear
   Jika $f1(t)\ dan\ f2(t)$ adalah dua fungsi waktu yang berbeda maka

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \int_0^\infty [f_1(t) + f_2(t)]e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt$$
$$= \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

SIFAT – SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE
2. TRANSLASI FUNGSI

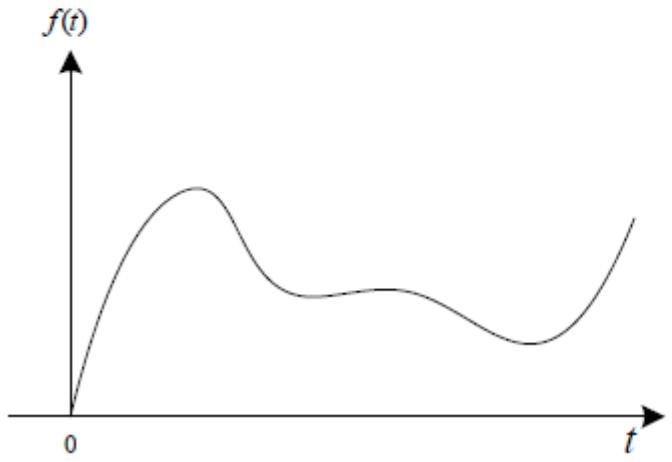
Translasi Fungsi

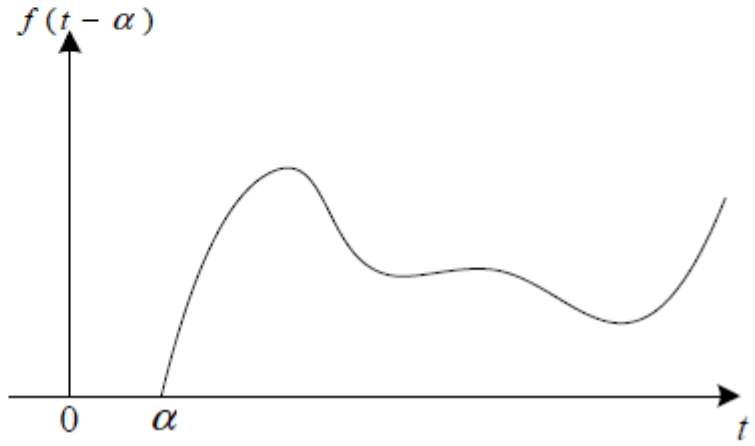
kita akan mencari transformasi Laplace dari fungsi yang ditranslasikan, $f(t-\alpha)$

disini ,

$f(t) \to 0$ untuk nilai $t < 0$ atau dengan kata lain

$f(t-\alpha) \to 0$ untuk nilai $t < \alpha$





SIFAT – SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE
2. TRANSLASI FUNGSI

Karena $f(t-\alpha) = 0 \; untuk \; 0 < t < \alpha$, maka

$$F(s) = \int_0^\infty f(u)\, e^{-su} du \qquad dimana \; u = t - \alpha$$

$$= \int_0^\infty f(t-\alpha)\, e^{-s(t-\alpha)} dt$$

$$= e^{\alpha s} \int_0^\infty f(t-\alpha)\, e^{-st} dt$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s)$$

SIFAT – SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE
3. PERKALIAN FUNGSI WAKTU DENGAN FUNGSI EKSPONENSIAL

Perkalian $f(t)$ dengan $e^{-\alpha t}$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st-\alpha t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\alpha)t}dt = F(s+\alpha)$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s+\alpha)$$

SIFAT – SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE
4. PENSKALAAN WAKTU

Penskalaan Waktu $f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha st}{\alpha}}\,d\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

$$= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha st}{\alpha}}\,d\left(\frac{t}{\alpha}\right) \qquad jika\, \frac{t}{\alpha} = \tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau) e^{-\alpha s\tau}\,d(\tau)$$

$$= \alpha F(s)$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(s)$$

SIFAT – SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE
5. DIFFERENSIASI

5. Diferensiasi

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt$$

Persamaan diatas dapat diintegralkan secara parsial dengan memisalkan :
$u = e^{-st} \quad dan \quad dv = df(t)$ kemudian disisipkan ke dalam persamaan :

$$\int_0^\infty udv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu$$

Karena $du = -se^{-st}\ dan\ v = f(t)$

SIFAT – SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE
5. DIFFERENSIASI

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = [e^{-s\infty}f(\infty) - e^{-s0}f(0)] + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = -f(0) + sF(s)$$

maka dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Untuk turunan berikutnya

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{d}{dt}f(0) - \cdots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0)$$

SIFAT – SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE
6. INTEGRAL

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\right] e^{-st}dt$$

Dengan integral parsial diperoleh :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \left[\int_0^t f(t)\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = -\left[\int_0^t f(t)\right]\frac{1}{-s}\Bigg|_{t=0} - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s}f^{-1}(0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Maka :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0)$$

TABEL TRANSFORMASI LAPLACE

No	$f(t)$	$F(s)$
1	Impuls satuan $\delta(t)$	1
2	Unit step $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n, \quad dimana\ n = 1,2,3 \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

INVERSE LAPLACE

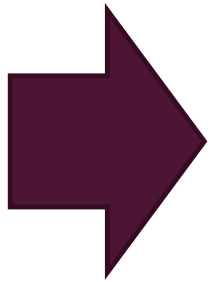
Time Function $f(t)$ $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$	**Laplace Transform of** $f(t)$ $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$ $\quad s > 0$
t (unit-ramp function)	$\frac{1}{s^2}$ $\quad s > 0$
t^n (n, a positive integer)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $\quad s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\quad s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\quad s > 0$
$t^n g(t)$, for $n = 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \frac{d^n G(s)}{ds^n}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ $\quad s > \lvert\omega\rvert$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ $\quad s > \lvert\omega\rvert$
$g(at)$	$\frac{1}{a}G\left(\frac{s}{a}\right)$ Scale property
$e^{at}g(t)$	$G(s-a)$ Shift property
$e^{at}t^n$, for $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ $\quad s > a$
te^{-t}	$\frac{1}{(s+1)^2}$ $\quad s > -1$
$1 - e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$ $\quad s > -\frac{1}{T}$

$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ $\quad s > a$
$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ $\quad s > a$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$ $\quad s > 0$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$ $\quad s > 0$
$u(t-a)\cdot g(t-a)$	$e^{-as}G(s)$ Time-displacement theorem
$g'(t)$	$sG(s) - g(0)$
$g''(t)$	$s^2 \cdot G(s) - s \cdot g(0) - g'(0)$
$g^{(n)}(t)$	$s^n \cdot G(s) - s^{n-1} \cdot g(0) - s^{n-2} \cdot g'(0) - \ldots - g^{n-1}(0)$
$\int_0^t g(t)\ dt$	$\frac{G(s)}{s}$
$\int g(t)\ dt$	$\frac{G(s)}{s} + \frac{1}{s}\left\{\int g(t)\ dt\right\}_{t=0}$

CONTOH

Lakukan transformasi laplace balik pada persamaan di kawasan s berikut ini:

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2+9}$$



$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+9}\right\}$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+9}\right\}$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$= \cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t$$