MODUL 1

Persamaan Diferensial Orde Satu

Prof. SM. Nababan, Ph.D.

PENDAHULUAN

Persamaan Diferensial (PD) adalah salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah-masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk PD.

Pada perkembangan ilmu sekarang PD sebagai model banyak dijumpai dalam bidang-bidang sains, teknologi (teknik), biologi, ekonomi, ilmu sosial, demografi. PD digunakan sebagai alat untuk mengetahui kelakuan maupun sifat-sifat solusi masalah yang ditinjau. Karena itu, penting sekali mempelajari PD.

Dalam modul ini, Anda pertama-tama mempelajari PD yang lebih sederhana, yaitu PD orde satu. Anda akan mengenal tipe-tipe persamaan diferensial dan mempelajari bagaimana caranya menyelesaikan PD tersebut.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan memahami metode penyelesaian PD orde satu dan terampil menggunakannya.

Secara lebih rinci, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. mengidentifikasi tipe-tipe PD orde satu yang dapat diselesaikan.
2. menentukan solusi umum PD orde satu;
3. menentukan PD orde satu yang solusi umumnya diberikan;
4. menentukan solusi khusus dengan menggunakan syarat awal;
5. memilih metode dan menggunakannya untuk menyelesaikan PD orde satu;
6. memberikan contoh masalah konkret yang dapat dirumuskan dalam bentuk PD orde satu serta menyelesaikannya dengan tuntas.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengertian PD Orde Satu dan Solusinya

Definisi 1

Suatu **PD orde satu** dapat dinyatakan secara umum dalam dua bentuk, yaitu:

Seperti pada matakuliah Kalkulus:
y' atau $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan pertama dari y terhadap variabel x.
y'' atau $\frac{d^2y}{dx^2}$ adalah turunan kedua dari y terhadap variabel x.
Dst.

Bentuk **implisit**,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{atau} \quad F(x, y, y') = 0 \,. \quad \text{..................} \quad (1)$$

Bentuk **eksplisit**,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{atau} \quad y' = f(x, y) \,. \quad \text{.........................} \quad (2)$$

Contoh 1.1

Contoh-contoh mengidentifikasi PD orde satu:

1. $$\underbrace{xy' + y^2 + x^2 + 1 = 0 \quad \text{atau} \quad x\frac{dy}{dx} + y^2 + x^2 + 1 = 0}_{PD\ orde\ satu\ bentuk\ implisit.}$$

Perhatikan orde turunan variabel y terhadap x yang dilingkari.

2. $$\underbrace{y'' - 2y + e^x = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2y + e^x = 0}_{bukan\ PD\ orde\ satu,\ PD\ orde\ dua\ bentuk\ implisit}$$

3. $y' = 2y + e^x$ (*PD orde satu bentuk eksplisit:* $f(x,y) = 2y + e^x$)

4. $y'' = xy + x^2$ (*bukan PD orde satu, PD orde dua bentuk eksplisit*). ■

Definisi 2
Suatu fungsi $y = y(x)$ dikatakan **solusi** PD (1) atau (2) apabila $y = y(x)$ dan turunannya y' memenuhi PD (1) atau (2).

Contoh 1.2
Anda dapat memeriksa bahwa $y = x^2 + 1$ adalah solusi PD: $y' = 2x$. Demikian pula $y = x^2 + C$ untuk C konstanta sebarang juga merupakan solusi PD: $y' = 2x$. (Periksa dengan menggunakan Definisi 2.) ■

Solusi $y = x^2 + 1$ disebut sebagai suatu **solusi khusus** *(partikelir)* untuk PD: $y' = 2x$, sedangkan solusi $y = x^2 + C$ yang memuat konstanta C disebut sebagai **solusi umum** PD: $y' = 2x$.

Jadi solusi umum suatu PD masih memuat konstanta C, sedangkan solusi khusus diperoleh dari solusi umum dengan mengambil konstanta C suatu bilangan tertentu atau suatu solusi yang memenuhi syarat-syarat yang diberikan, misalnya **syarat awal**.

Contoh 1.3
Tinjau PD: $y' = \cos x$. .... (3)

Penyelesaian:
Solusi umum PD ini adalah $y = \sin x + C$. Fungsi-fungsi:
$y = \sin x + 1$, $y = \sin x$ dan $y = \sin x - 4$ masing-masing adalah solusi khusus PD (3) yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil masing-masing nilai $C = 1$, $C = 0$ dan $C = -4$.

Untuk menentukan **solusi khusus** yang memenuhi syarat awal $y(\pi/2) = 10$, ditentukan C dari solusi umum $y = \sin x + C$ dengan mengambil nilai $y = 10$ dan $x = \pi/2$.

$\rightarrow$ *dibaca "maka"*

Jadi, $10 = \sin(\pi/2) + C \rightarrow C = 9$ sehingga solusi khusus yang memenuhi **syarat awal** $y(\pi/2) = 10$ adalah $y = \sin x + 9$. ■

Contoh 1.4

Tinjau PD: $(y')^2 - xy' + y = 0$. …... (4)

Penyelesaian:

Anda dapat memeriksa bahwa **solusi umum** PD (4) adalah

$$y = Cx - C^2 .$$

Dengan mengambil C = 1, C = 2, C = − 4 diperoleh masing-masing solusi khusus $y = x - 1$, $y = 2x - 4$ dan $y = -4x - 16$.

Untuk menentukan **solusi khusus** yang memenuhi syarat awal $y(1) = -6$, Anda tentukan C dari persamaan $y = Cx - C^2$ dengan mengambil nilai $y = -6$ untuk $x = 1$. Ini memberikan

$$-6 = C.1 - C^2 = C - C^2$$

atau

$$C^2 - C - 6 = 0 \rightarrow (C-3)(C+2) = 0 \rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = -2 .$$

Jadi, ada **dua** solusi khusus yang memenuhi syarat awal $y(1) = -6$, yaitu $y = 3x - 9$ dan $y = -2x - 4$. Adanya dua solusi khusus ini disebabkan PD (4) mempunyai pangkat dua. ■

Keluarga Lengkungan (Kurva)

Anda telah mengetahui solusi umum suatu PD memuat konstanta C. Jadi solusi umum dapat ditulis dalam bentuk $y = y(x, C)$.

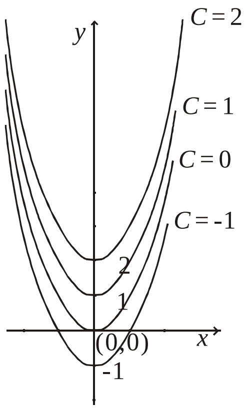
Contoh 1.5

Solusi umum PD: $y' = \cos x$ adalah $y = y(x, C) = \sin x + C$.

Grafik dari solusi umum $y = y(x, C)$ merupakan keluarga lengkungan (kurva) karena untuk setiap pengambilan nilai C diperoleh suatu lengkungan solusi khusus.

Contoh 1.6

Solusi umum PD: $y' = 2x$ adalah $y = y(x,C) = x^2 + C$, yang merupakan keluarga parabola. Untuk C=1 diperoleh parabola $y = x^2 + 1$ dan seterusnya (lihat Gambar 1.1). ■



Gambar 1. 1

Sekarang dapatkah Anda menentukan suatu PD yang solusi umumnya adalah keluarga lengkungan $y = y(x,C)$ yang diketahui?

> ***Perhatian*: (*a*).** PD yang solusi umumnya $y = y(x,C)$ pada prinsipnya dapat dicari dengan mengeliminasi C dari kedua persamaan
> $$\begin{cases} y = y(x,C) \\ y' = \dfrac{d}{dx}\big(y(x,C)\big). \end{cases}$$

Contoh 1.7

Tentukan PD yang solusi umumnya $y = Ce^x$.

Penyelesaian: Kita eliminasi C dari kedua persamaan: $\begin{cases} y = Ce^x \\ y' = Ce^x. \end{cases}$

Dari kedua persamaan ini Anda melihat bahwa $y' = y$.

Jadi, PD: $y' = y$ mempunyai solusi umum $y = Ce^x$. ■

> ***Perhatian: (b).*** Bila solusi umumnya diberikan dalam bentuk implisit $g(x,y,C)=0$ maka pada prinsipnya PD-nya diperoleh dengan mengeliminasi C dari kedua persamaan:
>
> $$\begin{cases} g(x,y,C)=0 \\ \dfrac{d}{dx}g(x,y,C)=0, \quad \text{dengan mengingat y fungsi dari } x. \end{cases}$$

Contoh 1.8

Tentukan PD yang solusi umumnya $x^2+y^2=C$.

Penyelesaian:

Dengan menurunkan $x^2+y^2=C$ terhadap x secara implisit diperoleh: $2x+2y.y'=0$. Karena persamaan ini tidak lagi memuat C maka secara langsung diperoleh PD: $y'=-\dfrac{x}{y}$ sebagai PD yang solusi umumnya $x^2+y^2=C$. ■

Contoh 1.9

Tentukan PD yang solusi umumnya: $g(x,y,C)=x^2-Cy+C^2=0$.

Penyelesaian:

Dengan menurunkan *g(x,y,C)* terhadap x secara implisit diperoleh $2x-Cy'=0$. Sekarang Anda mengeliminasikan C dari kedua persamaan:

$$\begin{cases} x^2-Cy+C^2=0 \\ 2x-Cy'=0. \end{cases}$$

Dari persamaan *kedua* diperoleh $C=\dfrac{2x}{y'}$. Ini dimasukkan ke persamaan *pertama*, menghasilkan:

$$x^2-\frac{2x}{y'}.y+\left(\frac{2x}{y'}\right)^2=0 \text{ atau } 4x-2yy'+x\left(y'\right)^2=0.$$

PD ini mempunyai solusi umum $g(x,y,C)=x^2-Cy+C^2=0$. ■

Setelah membaca materi kegiatan belajar di atas, cobalah kerjakan latihan berikut agar pemahaman Anda lebih mantap.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Manakah di antara PD-PD berikut merupakan PD orde satu?
   A. $y'' + 3y - xy = 0$
   B. $xy' + 3y \sin x + 2 = 0$
   C. $x(y')^2 - 2y' + x^2 = 0$
   D. $(y')^2 + 3y - y'' + x = 0$.

a. Mengindentifikasi tipe-tipe PD orde satu.

2) Manakah di antara PD-PD berikut dalam bentuk eksplisit atau implisit
   A. $y' = y \sin x + x^2$
   B. $xy' + 3y \sin x - 2 = 0$
   C. $x(y')^2 + 4y' - x^3 = 0$
   D. $y' = \dfrac{x+y}{xy}$.

b. Menentukan solusi umum PD orde satu.

3) Anda diminta memeriksa apakah
   $y = C \cos x$ ....(*)
   merupakan solusi umum dari PD:
   $y' + y \tan x = 0$ . ...(**)

Langkah-langkah yang harus dilakukan sebagai berikut:

(i) Turunan $y = C \cos x$ terhadap x secara eksplisit adalah:
   .... [sebut persamaan (***)]

(ii) Sekarang substitusikan persamaan (*) dan (***) ke (**), diperoleh
   ....

(iii) Kesimpulan : ....

4) Solusi umum PD: $(y')^2 = 4y$ adalah:
   A. $y = x + C$
   B. $y = (x + C)^{3/2}$

C. $y = (x + C)^2$
D. $y = (x + C)^3$.

c. Menentukan PD orde satu apabila solusi umum diberikan.

5) Anda diminta menentukan PD yang solusi umumnya adalah
$g(x, y, C) = x + Cx^2 y + C^2 = 0$ .... (*)

Langkah-langkah yang harus dilakukan sebagai berikut:

(i) Turunan $g(x,y,C)$ terhadap x secara implisit adalah:
.... [sebut persamaan (**)]

(ii) Sekarang C dieliminasi dari kedua persamaan:
$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ [\textit{persamaan} (*)]} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ [\textit{persamaan} (**)]} \end{cases}$$

(iii) Dari salah satu persamaan di (ii), diperoleh $C =$ ....

(iv) Substitusi C ini ke persamaan lainnya di (ii) menghasilkan PD yang diminta, yaitu persamaan diferensial: ....

6) Fungsi $y = \dfrac{C - \cos x}{x}$ adalah solusi umum PD:

A. $xy' + y = -\cos x$
B. $xy' + y = \cos x$
C. $xy' + y = \sin x$
D. $xy' + y = -\sin x$.

7) PD yang solusi umumnya $g(x, y, C) = x^4 - Cxy + 2 = 0$ adalah ....

A. $(x^5 + 2x)y' - 3x^4 y + 2y = 0$
B. $(x^5 + 2x)y' - x^4 y + 2y = 0$
C. $(x^5 + 2)y' - x^4 y + y = 0$
D. $(x^5 + 2)y' - 3x^4 y + y = 0$.

8) PD yang solusi umumnya $g(x, y, C) = 3x^2 - Cx^2 y + C^2 = 0$ adalah ....

A. $3x^2 (x^2 y' + 2xy)^2 + 6x^3 y(x^2 y' + 2xy) + 36x^2 = 0$
B. $3x^2 (x^2 y' + 2xy)^2 - 6x^3 y(x^2 y' + 2xy) + 36x^2 = 0$
C. $3x^2 (x^2 y' + 2xy)^2 + 4x^3 y(x^2 y' + 2xy) + 36x^2 = 0$
D. $3x^2 (x^2 y' + 2xy)^2 - 4x^3 y(x^2 y' + 2xy) + 36x^2 = 0$.

d. Menentukan solusi khusus PD orde satu dengan mengguna-kan syarat awal.

9) Anda diminta memeriksa apakah

$y = 2e^x$ .... (*)

merupakan solusi khusus dari PD:

$y' = y$ .... (**)

dengan syarat awal $y(0) = 2$.

***Langkah-langkah yang harus dilakukan sebagai berikut*:**

(i) Periksa apakah syarat awal memenuhi solusi khusus.

....

(ii) Kalau tidak memenuhi (SELESAI).

Kalau memenuhi, turunan $y = 2e^x$ adalah: ....

[sebut persamaan (***)]

(iv) Substitusikan persamaan (*) dan (***) ke (**)

(v) Kesimpulan: ....

10) Solusi khusus PD: $y' = \sin x$ yang memenuhi syarat awal $y(0) = 3$ adalah

A. $y = 2 \cos x + 1$

B. $y = -2 \cos x + 5$

C. $y = \cos x + 2$

D. $y = -\cos x + 4$.

Agar latihan Anda terarah dengan baik dan Anda dapat memperkirakan hasil latihan Anda, bacalah rambu-rambu jawaban dan jawaban latihan 1 ini di akhir modul ini.

Setelah mengerjakan latihan 1, simaklah rangkuman kegiatan belajar berikut ini sehingga Anda merasa siap untuk mengerjakan Tes Formatif 1.

RANGKUMAN

PD orde satu adalah suatu fungsi yang memuat satu variabel bebas (x) dan satu variabel tak bebas (y) beserta turunan pertamanya (y') yang dikaitkan secara *eksplisit* atau *implisit*. **Solusi umum** PD adalah fungsi yang memuat konstanta C dan memenuhi PD tersebut. **Solusi khusus**

adalah solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil nilai C suatu bilangan tertentu atau solusi yang memenuhi syarat yang diberikan, misalnya syarat awal. Grafik dari solusi umum merupakan **keluarga lengkungan**, di mana untuk setiap nilai C diperoleh suatu **lengkungan** (kurva) atau **trayektori**.

PD yang solusi umumnya diberikan oleh fungsi $g(x,y,C) = 0$ dapat ditentukan dengan mengeliminasi C dari kedua persamaan:

$$\begin{cases} g(x,y,C) = 0 \\ \dfrac{d}{dx} g(x,y,C) = 0 \end{cases}$$

dengan mengingat y sebagai fungsi dari x.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Fungsi $y = x^2 + \cos x$ adalah solusi PD ....
   A. $y' = 2x + \sin x$
   B. $y' = 2x - \sin x$
   C. $y' = 2x + \cos x$
   D. $y' = 2x - \cos x$

2) Solusi umum PD: $y - y'(x+1) = 0$ adalah ....
   A. $y = -Cx + C$
   B. $y = Cx - C$
   C. $y = Cx + C$
   D. $y = -Cx - 2C$

3) Solusi khusus PD: $y' + y^2 = 0$ yang memenuhi syarat $y(1) = \frac{1}{4}$ adalah ....
   A. $y(x+3) - 1 = 0$
   B. $y(x+3) + 1 = 0$
   C. $y(2x+2) - 1 = 0$
   D. $y(2x+2) + 1 = 0$

4) PD: $(x^2+1)(xy'+y)-2x^2y=0$ mempunyai solusi umum: $g(x,y,C)\equiv x^2-Cxy+1=0$.
   Solusi PD yang memenuhi syarat $y(1)=2$ adalah ....
   A. $x^2+xy+1=0$
   B. $x^2-xy+1=0$
   C. $x^2-2xy+1=0$
   D. $x^2+2xy+1=0$

5) PD yang solusi umumnya $g(x,y,C)\equiv \sin x - Cy + x = 0$ adalah ....
   A. $(\sin x + x)y' - y(\cos x + 1) = 0$
   B. $(\sin x - x)y' + y(\cos x + 1) = 0$
   C. $(\sin x + x)y' - y(\cos x - 1) = 0$
   D. $(\sin x + x)y' + y(\cos x - 1) = 0$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

PD Variabel Terpisah dan PD Homogen

Persamaan diferensial orde satu yang dapat ditulis dalam bentuk:

$g(y)y' = f(x)$ .... (1)

Variabel y dan y' dengan variabel x terpisah diantara tanda "="

disebut PD orde satu variabel terpisah.

Dengan mengambil $y' = \dfrac{dy}{dx}$, PD (1) dapat dituliskan dalam bentuk $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ . ... (2)

Contoh 1.10

PD: $xyy' + x^2 + 1 = 0$ adalah PD variabel terpisah karena dapat dituliskan dalam bentuk (1), yaitu:

$$yy' + \left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0 \quad \text{atau} \quad yy' = -\left(\frac{x^2+1}{x}\right).$$ ■

Contoh 1.11

PD: $x(y+1)y' + x^2(y^2+4) = 0$ adalah PD variabel terpisah karena dapat dituliskan dalam bentuk (1), yaitu:

$$\left(\frac{y+1}{y^2+4}\right)y' + \left(\frac{x^2}{x}\right) = 0, \quad \text{atau} \quad \left(\frac{y+1}{y^2+4}\right)dy + x\,dx = 0$$

atau dalam bentuk (2), yaitu

hanya mengandung variabel x.

$$\left(\frac{y+1}{y^2+4}\right)dy = -x\,dx.$$

hanya mengandung variabel y.

Contoh 1.12

PD: $(x+y^2)y'=(x+y)$ bukan PD variabel terpisah karena tidak dapat dituliskan dalam bentuk (1) atau (2). ■

Perhatian:
Metode penyelesaian PD variabel terpisah dapat dilakukan dengan **mengintegralkan** langsung PD (2), yaitu:

$\int g(y)dy=\int f(x)dx+C$ . ... (3)

Contoh *1.13*

Selesaikan PD: $xyy'+x^2+1=0$.

Penyelesaian:

PD ini, dengan sedikit melakukan manipulasi aljabar, dapat dituliskan dalam bentuk (2) sebagai $y\,dy=-\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)dx$.

Dengan mengintegralkan kedua ruas didapat:

$$\int y\,dy=-\int\left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}y^2=-\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=-\left(\frac{1}{2}x^2+\ln|x|\right)+C .$$

Jadi solusi umumnya adalah $y^2=-x^2-2\ln|x|+C$. ■

Contoh 1.14

Tentukan solusi PD: $(x^2+1)y'+y^2+1=0$ .... (4)

yang memenuhi syarat awal $y(0)=1$.

Penyelesaian:

Dengan membagi PD (4) dengan $(x^2+1)(y^2+1)$ didapat PD:

$$\frac{y'}{y^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=0 \text{ atau } \frac{dy}{y^2+1}=-\frac{dx}{x^2+1} .$$

Pengintegralan kedua ruas menghasilkan $\text{arc tan } y=-\text{arc tan } x+C$.

Dari syarat awal $y(0)=1$, diperoleh C sebagai berikut:

$$\text{arc tan } 1 = -\text{arc tan } 0 + C \Rightarrow C = \text{arc tan } 1.$$

Jadi solusi PD (4) yang memenuhi syarat awal $y(0)=1$ adalah

$$\text{arc tan } y = -\text{arc tan } x + \text{arc tan } 1 \quad \text{atau} \quad \text{arc tan } y + \text{arc tan } x = \frac{\pi}{4}$$

atau $\tan(\text{arc tan } y + \text{arc tan } x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Dari rumus tangens diperoleh

$$\tan(\text{arc tan } y + \text{arc tan } x) = \frac{\tan(\text{arc tan } y) + \tan(\text{arc tan } x)}{1 - \tan(\text{arc tan } y).\tan(\text{arc tan } x)} = \frac{y+x}{1-xy}.$$

Jadi, solusi PD (4) yang memenuhi syarat awal $y(0)=1$ adalah

$\Rightarrow$ *dibaca "maka" atau "mengakibatkan"*

$$\frac{y+x}{1-xy} = 1 \Rightarrow y + x = 1 - xy$$

$$y + xy = 1 - x \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x}.$$ ■

Contoh 1.15

(*Aplikasi*). Suatu bola tembaga mempunyai temperatur 100^0C. Pada saat $t=0$ bola tembaga tersebut dimasukkan ke dalam cairan yang temperaturnya 30^0C. Setelah 3 menit temperatur bola menjadi 70^0C. Tentukan setelah berapa menit temperatur bola menjadi 40^0C?

Penyelesaian:

Misalkan $x(t)$ temperatur bola tembaga pada saat *t*. Berdasarkan hukum Newton, model matematika untuk temperatur adalah:

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-30), \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

di mana (-*k*) konstanta dengan $k>0$. PD (5) adalah PD variabel terpisah dan dituliskan dalam bentuk $\frac{dx}{x-30} = -k\,dt$. Dengan mengintegralkan kedua ruas didapat $\ln(x-30) = -k\,t + \ln C$ (di sini konstanta integrasi diambil $\ln C$)

$$\ln(x-30) - \ln C = -k\,t \quad \text{atau} \quad \left(\frac{x-30}{C}\right) = e^{-kt} \quad \text{atau} \quad x(t) = C\,e^{-kt} + 30.$$

Jadi solusi umum PD (5) adalah: $x(t) = Ce^{-kt} + 30$.

Dari syarat awal $x(0) = 100$, Anda dapat mencari *C*, yaitu

$$100 = C + 30 \rightarrow C = 70 .$$

Jadi temperatur pada saat *t* adalah

$$x(t) = 70e^{-kt} + 30 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dari syarat $x(3) = 70$, konstanta *k* dapat ditentukan, yaitu

$$70 = 70e^{-3k} + 30 \rightarrow 70e^{-3k} = 40 \rightarrow e^{-3k} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$$

$$-3k = \ln\left(\frac{4}{7}\right) \rightarrow k = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{7}{4}\right).$$

Untuk menentukan waktu sehingga temperatur bola menjadi $40^0 C$, kita masukkan $x(t) = 40$ pada persamaan (6), yaitu

$$40 = 70e^{-kt} + 30 \rightarrow e^{-kt} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7} \quad \text{atau} \quad -kt = \ln\left(\frac{1}{7}\right) = -\ln 7$$

atau $t = \dfrac{-\ln 7}{-k} = \dfrac{\ln 7}{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{7}{4}\right)} = \dfrac{3\ln 7}{\ln\left(\frac{7}{4}\right)}$. Jadi, setelah waktu $t = \dfrac{3\ln 7}{\ln\left(\frac{7}{4}\right)}$ menit, temperatur bola tembaga menjadi $40^0 C$. ■

Definisi 1

Suatu PD orde satu dikatakan PD homogen apabila dapat diubah/ditulis menjadi PD berbentuk:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Contoh 1.16

PD: $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ adalah PD homogen karena dapat diubah menjadi

PD: $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\right) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, dengan $g(u) = \dfrac{1}{2}\left(u - \dfrac{1}{u}\right)$. ■

Contoh 1.17

PD: $\left(x\sin\frac{y}{x}\right).y' = y\sin\frac{y}{x}+x$ adalah PD homogen karena dapat diubah menjadi PD berbentuk :

$$y' = \frac{\left(y\sin\frac{y}{x}+x\right)}{\left(x\sin\frac{y}{x}\right)} = \frac{\left(\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}+1\right)}{\left(\sin\frac{y}{x}\right)} = g\left(\frac{y}{x}\right), \text{ dengan } g(u) = \frac{u\sin u+1}{\sin u}. \quad \blacksquare$$

Contoh 1.18

PD: $xy' - (y + x^2 + 9y^2) = 0$ bukan PD homogen karena

$y' = \frac{y+x^2+9y^2}{x} = \frac{y}{x} + x + 9\frac{y^2}{x}$ tidak dapat ditulis dalam bentuk

$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Perhatian :

Ingat bentuk ini dalam penyelesaian PD orde satu homogen.

Metode penyelesaian PD orde satu homogen dilakukan dengan substitusi $z = \frac{y}{x}$ sehingga PD berubah menjadi PD variabel terpisah. Tinjau PD homogen berbentuk $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ .... (8)

Ambil substitusi $z = \frac{y}{x}$. Maka $y = xz$ dan $dy = x\,dz + z\,dx$ dan dari (8) didapat $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x\,dz + z\,dx}{dx} = g(z)$

atau $\quad x\frac{dz}{dx} + z = g(z) \rightarrow x\frac{dz}{dx} = g(z) - z$.

Jadi $\frac{dz}{g(z)-z} = \frac{dx}{x}$ .... (9)

PD (9) ini merupakan PD variabel terpisah. Dengan mengganti $z = \frac{y}{x}$ dalam penyelesaian (9) akan menghasilkan solusi umum PD (7).

Contoh 1.19

Tentukan solusi umum PD: $2xy\,y' + x^2 - 2y^2 = 0$. .... (10)

Penyelesaian:

Bentuk PD (10) ditulis menjadi $y' = \dfrac{2y^2 - x^2}{2xy} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{y} = g(\dfrac{y}{x})$, dengan $g(u) = u - \dfrac{1}{2u}$. Jadi PD (10) adalah PD homogen.

Dengan mengambil $z = \dfrac{y}{x}$, dari (9) PD di atas menjadi $\dfrac{dz}{g(z) - z} = \dfrac{dx}{x}$. Dari definisi $g(u) = u - \dfrac{1}{2u}$, PD ini berubah menjadi,

$$\frac{dz}{\left(z - \frac{1}{2z} - z\right)} = \frac{dx}{x} \rightarrow -2\,z\,dz = \frac{dx}{x}.$$

Solusi PD ini adalah $-z^2 = \ln x + C$.

Dengan mengganti $z = \dfrac{y}{x}$, diperoleh solusi umum PD (10)

$$-\frac{y^2}{x^2} = \ln x + C \quad \text{atau} \quad y^2 = -x^2(\ln x + C).$$ ■

Contoh 1.20

Selesaikan PD: $x \sin \dfrac{y}{x} y' = y \sin \dfrac{y}{x} + x$. .... (11)

Dalam Contoh 8 di atas telah ditunjukkan bahwa PD (11) dapat Anda tulis menjadi $y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, di mana $g(u) = \dfrac{u \sin u + 1}{\sin u}$.

Penyelesaian:

Dengan mengambil $z = \dfrac{y}{x}$, berdasarkan (9) PD menjadi

$$\frac{dz}{g(z)-z}=\frac{dx}{x}\to\frac{dz}{\left(\dfrac{z\sin z+1}{\sin z}\right)-z}=\frac{dx}{x}\to\sin z\;dz=\frac{dx}{x}.$$

PD ini mempunyai solusi umum: $-\cos z=\ln x+C$.

Dengan mengganti $z=\dfrac{y}{x}$ diperoleh solusi umum PD (11), yaitu $-\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)=\ln x+C$ atau $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)+\ln x=C$. ■

Perhatian:

PD: $\left(a_1x+b_1y+c_1\right)dx+\left(a_2x+b_2y+c_2\right)dy=0$ .... (12)

dapat ditinjau dengan 3 (*tiga*) kasus:

(a) Bila $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=k$ maka PD (12) berubah menjadi PD: $k\,dx+dy=0$, PD variabel terpisah.

(b) Bila $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k\neq\dfrac{c_1}{c_2}$, dengan substitusi $u=a_2x+b_2y$. PD menjadi PD variabel terpisah

$$(k\,u+c_1)\;dx+\left(\frac{u+c_2}{b_2}\right)(du-a_2\;dx)=0$$

$$[b_2(k\,u+c_1)-a_2(u+c_2)]dx+(u+c_2)\,du=0$$

$$dx+\left\{\frac{u+c_2}{(k\,b_2-a_2)u+b_2\,c_1-a_2\,c_2}\right\}du=0\,. \quad \text{..............................} \quad (13)$$

(c) Bila $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$, dengan substitusi $u=a_1x+b_1y+c_1$ dan $v=a_2x+b_2y+c_2$, dapat diperlihatkan bahwa

$$dx=\left(\frac{b_2\,du-b_1\,dv}{a_1\,b_2-a_2\,b_1}\right)\;;\quad dy=\left(\frac{a_2\,du-a_1\,dv}{a_2\,b_1-b_2\,a_1}\right)\quad\text{dan}$$

PD(11) menjadi

$$u\,(b_2\,du-b_1\,dv)-v\,(a_2\,du-a_1\,dv)=0$$

$$(b_2\,u-a_2\,v)\,du+(a_1\,v-b_1u)\,dv=0\,, \quad \text{..................................} \quad (14)$$

suatu PD homogen.

Contoh 1.21

Tentukan solusi umum PD:

$$(4x-6y+2)\,dx+(2x-3y+3)\,dy=0\,. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Penyelesaian:

Ini adalah kasus (b). Dengan substitusi $u=2x-3y$, dari (13) didapat PD (15) menjadi PD

$$dx+\left(\frac{u+3}{-8u-12}\right)du=0 \quad \Rightarrow \quad dx-\frac{1}{8}\left(\frac{u+3}{u+\frac{3}{2}}\right)du=0$$

$$dx-\frac{1}{8}\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{u+\frac{3}{2}}\right)du=0 \text{ atau } x-\frac{1}{8}\left(u+\frac{3}{2}\ln(u+\frac{3}{2})\right)=C\,.$$

Solusi umum PD adalah $8x-(2x-3y)-\frac{3}{2}\ln\left(2x-3y+\frac{3}{2}\right)=C$ atau

$$6x+3y-\tfrac{3}{2}\ln\left(2x-3y+\tfrac{3}{2}\right)=C\,. \qquad \blacksquare$$

Contoh 1.22

Tentukan solusi umum PD:

$$(2x-y+2)\,dx+(x+2y+2)\,dy=0\,. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Penyelesaian:

Dengan substitusi $u=2x-y+2$ dan $v=x+2y+2$, dari (13), PD (16) menjadi PD: $(2u-v)\,du+(2v+u)\,dv=0$

$$\frac{dv}{du}=\frac{v-2u}{u+2v}=\frac{\left(\frac{v}{u}\right)-2}{1+2\left(\frac{v}{u}\right)}=g\left(\frac{v}{u}\right) \text{ suatu PD homogen.}$$

Substitusi $z=\dfrac{v}{u}$, PD menjadi

$$\frac{dz}{\left(\frac{z-2}{1+2z}\right)-z}=\frac{du}{u} \Rightarrow \frac{(2z+1)\,dz}{-2z^2-2}=\frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2+1}dz=-\frac{du}{u} \Rightarrow \frac{z\,dz}{z^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{z^2+1}dz=-\frac{du}{u} \quad \text{atau}$$

$$\frac{1}{2}\ln(z^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}z=-\ln u+\ln C \qquad \text{atau} \qquad u(z^2+1)^{\frac{1}{2}}=Ce^{-\frac{1}{2}\tan^{-1}z}$$

atau $u\left\{\left(\dfrac{v^2}{u^2}\right)+1\right\}^{\frac{1}{2}}=Ce^{-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)}$ atau $\sqrt{u^2+v^2}=Ce^{-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)}$.

Jadi, solusi umum PD adalah

$$\sqrt{(2x-y+2)^2+(x+2y+2)^2}=Ce^{-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y+2}{2x-y+2}\right)}. \qquad \blacksquare$$

Setelah membaca materi kegiatan belajar di atas, cobalah kerjakan latihan berikut agar pemahaman Anda lebih mantap.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Manakah di antara PD-PD berikut PD variabel terpisah?
   A. $(x^2-y^2)\,y'+x\,y=0$
   B. $(x^2y^2+y^2)y'+x=0$
   C. $(x\ \sin\ y+x^2)\,y'+\cos\ x=0$
   D. $(x\sin y+x\,y\ \ )y'+(x^2+1)y=0$

2) Manakah di antara PD-PD berikut PD homogen
   A. $(x^2-y^2)y'+xy=0$
   B. $(x^2+y^2+x)y'=xy+x$
   C. $(x+y^2)\,y'+(x^2-y)=0$
   D. $xy'=y+x\ \sec\ (y/x)$

3) PD: $y'=\dfrac{y}{x\ \ln x}$ dapat diubah menjadi
   (i) .... dy = ... dx
   (ii) Solusi umum adalah ....

4) Solusi umum PD: $y' \sin 2x = y \cos 2x$ adalah
   A. $y^2 = C \cos 2x$
   B. $y^2 = C \sin 2x$
   C. $y^2 = -C \cos 2x$
   D. $y^2 = C \sin 3x$

5) Solusi PD: $(x+1)y' = 2y$ yang memenuhi syarat awal $y(0) = 1$ adalah
   A. $y = (2x-1)^2$
   B. $y = (2x+1)^2$
   C. $y = (x+1)^2$
   D. $y = (x-1)^2$

6) Suatu zat radioaktif mula-mula banyaknya x_0 gram. Zat radioaktif berkurang banyaknya sebanding dengan banyaknya pada saat tersebut. Tentukan waktu *T* sehingga banyaknya zat radioaktif pada saat *T* adalah setengah dari banyaknya zat semula. Waktu *T* ini dikenal sebagai waktu setengah umur (hidup).

Langkah Penyelesaian:

Misalkan, $x(t)$ gram menyatakan banyaknya zat radioaktif pada saat t. Maka $x(t)$ memenuhi PD:

(i) $\frac{dx}{dt} = -k\,?$, di mana k adalah konstanta pembanding dengan $k > 0$.
   Penyelesaian PD memberikan solusi umum
(ii) $x =$ ....
   Dengan memasukkan syarat awal $x(0) = x_0$ didapat solusi
(iii) $x =$ ....
   Selanjutnya waktu *T* diperoleh dari persamaan:
(iv) ....
   Yang memberikan nilai *T*:
(v) $T =$ ....

7) PD: $x\,y\,y' = 2y^2 + 4x^2$ dapat ditulis dalam bentuk $y' = g(y/x)$, di mana

A. $g(u) = 2u - \dfrac{4}{u}$

B. $g(u) = 2u + \dfrac{4}{u}$

C. $g(u) = \dfrac{2}{u} + 4u$

D. $g(u) = \dfrac{2}{u} - 4u$.

8) Tentukan solusi umum PD: $xy' - y - x\ \tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$.

Untuk menyelesaikannya Anda diminta melengkapi ungkapan-ungkapan berikut:

(i) PD dapat ditulis dalam bentuk:
$y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = g(y/x)$,
di mana $g(u) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) Dengan substitusi $z = \dfrac{y}{x}$, berdasarkan (8) diperoleh PD:

$$\frac{dx}{x} = \ldots\ldots\ldots dz$$

(iii) Solusi PD di (ii) adalah ....

(iv) Dengan mengganti $z = \dfrac{y}{x}$ diperoleh solusi umum PD di atas,

yaitu ....

9) Solusi umum PD: $x\,y' = y + x\ \sec\left(\dfrac{y}{x}\right)$ adalah ....

A. $y = C\,e^{\cos(y/x)}$

B. $x = C\,e^{\cos(y/x)}$

C. $y = C\,e^{\sin(y/x)}$

D. $x = C\,e^{\sin(y/x)}$

10) Solusi umum PD: $(-x+3y+2)\,dx+(-2x+2y+3)\,dy=0$ adalah ....
   A. $(-4x+8y+7)^{1/3}=C(-x-y+1)^{4/3}$
   B. $(-4x-8y+7)^{1/3}=C(-x+y+1)^{4/3}$
   C. $(-4x-8y-7)^{1/3}=C(x-y+1)^{4/3}$
   D. $(4x-8y+7)^{1/3}=C(x-y-1)^{4/3}$

RANGKUMAN

PD variabel terpisah adalah PD orde satu yang dapat ditulis dalam bentuk: $g(y)y'=f(x)$.

Penentuan solusinya dilakukan dengan langsung mengintegrasikannya.

PD homogen adalah PD orde satu yang dapat dituliskan dalam bentuk $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Penyelesaian PD homogen dilakukan dengan mengubahnya ke PD variabel terpisah dengan menggunakan substitusi $z=\frac{y}{x}$.

Kini, setelah membaca rangkuman, tiba saatnya Anda mengerjakan Tes Formatif.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) PD variabel terpisah di antara PD-PD berikut adalah PD:
   A. $(x+y)y'=x^2-2y^2$
   B. $(x^2y+x^2\cos\, y)y'+(2xy+6x\sin y)=0$
   C. $xy'-x+x^2y=0$
   D. $(x+y)y'-x+2y=0$.

2) PD homogen di antara PD-PD berikut adalah PD:
   A. $x\,y\,y' + xy^2 + 4xy = 0$
   B. $xy' = y + x^2 \cos(y/x)$
   C. $(x+y)y' - x + 2y = 0$
   D. $(x+y)y' = x^3 - 2y^2$.

3) Dengan substitusi $z = \dfrac{y}{x}$, PD: $x\left(1 + \cos\dfrac{y}{x}\right)y' - y\sin\dfrac{y}{x} = 0$ berubah menjadi ....
   A. $\dfrac{(1+\cos z)\,dz}{z(\sin z - \cos z - 1)} = \dfrac{dx}{x}$
   B. $\dfrac{(1+\cos z)\,dz}{z(\sin z + \cos z + 1)} = \dfrac{dx}{x}$
   C. $\dfrac{(1-\cos z)\,dz}{z\,(\sin z - \cos z + 1)} = \dfrac{dx}{x}$
   D. $\dfrac{(1-\cos z)\,dz}{z\,(\sin z + \cos z - 1)} = \dfrac{dx}{x}$.

4) Solusi PD: $y\,dy = (x + \ln x)(y^2 + 1)\,dx$ adalah ....
   A. $\ln(y^2+1) = x^2 + 2x(\ln x + 1) + C$
   B. $\ln(y^2+1) = x^2 - 2x(\ln x - 1) + C$
   C. $\ln(y^2+1) = x^2 + 2x(\ln x - 1) + C$
   D. $\ln(y^2+1) = x^2 - 2x(\ln x + 1) + C$.

5) Solusi umum PD: $xy' = y + xe^{-y/x}$ adalah ....
   A. $y = x\,\ln(C\ln x)$
   B. $y = x\,\ln\left(\dfrac{C}{\ln x}\right)$
   C. $y = x\,\ln\,(\ln\,Cx)$
   D. $y = x\,\ln\left[\ln\left(\dfrac{C}{x}\right)\right]$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

PD Eksak dan Faktor Integrasi

Misalkan $f(x, y)$ suatu fungsi dua variabel. Maka Anda telah mengetahui bahwa **diferensial total** df adalah

$df = df(x, y)$.
$\frac{\partial f}{\partial x}$ *turunan parsial* $f(x,y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \; .$$

Contoh 1.23

Fungsi $f(x, y) = x^3 y^2$ mempunyai diferensial total

$$df = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y \, dy \; . \qquad \blacksquare$$

Contoh 1.24

Fungsi $f(x, y) = x \sin y - y^2$ mempunyai diferensial total

$$df = \sin y \, dx + (x \cos y - 2y) \, dy \; . \qquad \blacksquare$$

Sekarang PD eksak didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

PD orde satu berbentuk:

$$M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = 0 \qquad \text{..........} \qquad (1)$$

disebut **eksak** apabila terdapat fungsi $f(x, y)$, sehingga

$$df(x, y) = M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy \; . \qquad \text{..........} \qquad (2)$$

Dari definisi 1 PD eksak dan hubungan (1) Anda melihat bahwa

$$df(x, y) = 0 \; .$$

$\int df(x, y) = f(x, y)$

Jadi, dengan mengintegralkan ini diperoleh bahwa solusi umum PD (1) adalah

$$f(x, y) = C \; .$$

Selanjutnya dari definisi 1 diferensial total dan hubungan (2), Anda melihat bahwa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

M = M(x,y) dan N = N(x,y).

Bila *M(x,y)* dan *N(x,y)* mempunyai turunan-turunan parsial yang kontinu di bidang *xy*, maka dari (3) diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} . \quad \ldots. (4)$$

Selanjutnya, bila f mempunyai turunan-turunan parsial kedua yang kontinu maka dari (4) diperoleh:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Syarat (5) merupakan *syarat perlu* agar PD (1) eksak. Dapat diperlihatkan bahwa syarat ini juga *syarat cukup* sehingga hubungan (3) dapat dipergunakan untuk menentukan fungsi $f(x,y) = C$ yang merupakan solusi umum PD (1).

Contoh 1.25

M = M(x,y) dan N = N(x,y).

Tinjau PD: $\left(x + \frac{2}{y}\right) dy + y\,dx = 0 .$ ...... (6)

Di sini $M = y$ dan $N = x + \frac{2}{y}$. Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ dan $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ maka PD (6) eksak.

Untuk menentukan solusi umum PD (6), Anda mencari fungsi $f(x,y) = C$ sehingga hubungan (3) berlaku, yaitu $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Dari hubungan $\frac{\partial f}{\partial x} = M = y$, didapat dengan mengintegralkan terhadap x:

$$f(x,y) = xy + g(y) , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

g(y) konstanta pengintegralan terhadap x.

di mana $g(y)$ konstanta pengintegralan terhadap x (karena $\frac{d}{dx}g(y)=0$) dan $f(x,y)$ merupakan fungsi dari dua variabel x dan y. Dari hubungan $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ dan (7), didapat:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+g'(y)=x+\frac{2}{y}.$$

Jadi, $g'(y)=\frac{2}{y}$ dan ini memberikan $g(y)=\int\frac{2}{y}dy=2\ln y$.

Jadi, solusi umum PD (6) adalah $f(x,y)\equiv xy+2\ln y=C$. ■

Contoh 1.26

Tinjau PD: $e^y\,dx+(xe^y+2y)\,dy=0$. .... (8)

Di sini $M(x,y)=e^y$ dan $N(x,y)=xe^y+2y$ sehingga

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^y \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=e^y.$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ maka PD (8) eksak. Untuk menentukan solusi umum PD (8), Anda mencari fungsi $f(x,y)=C$ sehingga $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}=N$. Dari hubungan $\frac{\partial f}{\partial x}=M=e^y$, dengan mengintegralkan terhadap x, diperoleh:

$$f(x,y)=xe^y+g(y). \quad \text{...} \quad (9)$$

di mana $g(y)$ konstanta pengintegralan terhadap *x*. Dari hubungan $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ dan (9) diperoleh: $\frac{\partial f}{\partial y}=xe^y+g'(y)=xe^y+2y$.

Jadi, $g'(y)=2y$ dan $g(y)=y^2$. Solusi umum PD (8) adalah

$$f(x,y)\equiv xe^y+y^2=C.$$ ■

Contoh 1.27

PD: $y\,dx + (x^2 y - x)\,dy = 0$. .... (10)

adalah **tidak eksak** karena $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$ dan $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$. ■

Penyelesaian PD pada Contoh 1.27, tidak dapat dilakukan dengan menggunakan metode pada contoh-contoh sebelumnya. Untuk PD ini dibutuhkan suatu fungsi yang disebut dengan **faktor integrasi**.

Faktor integrasi:

Tinjau kembali PD pada Contoh 1.27, yakni

$$y\,dx + (x^2 y - x)\,dy = 0. \qquad \text{...} \quad (10)$$

Karena

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \;\; ; \;\; \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \;\; \text{dan} \;\; \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

maka PD (10) **tidak eksak**. Tetapi bila PD (10) dikalikan dengan faktor $\dfrac{1}{x^2}$ maka diperoleh PD:

$$\frac{y}{x^2}\,dx + \left(y - \frac{1}{x} \right) dy = 0$$

yang **eksak** $\left[\text{karena} \;\; \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2} \right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y - \dfrac{1}{x} \right) \right]$.

Fungsi semacam $\dfrac{1}{x^2}$ disebut sebagai **faktor integrasi**.

Definisi 2

> Misalkan PD: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ **tidak eksak**. Fungsi $\mu(x,y)$ sehingga PD:
>
> $\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$ .... (11)
>
> menjadi **eksak**, disebut **faktor integrasi**.

Terlihat bahwa solusi umum PD yang tidak eksak sama dengan solusi umum PD yang menjadi eksak, yaitu PD yang telah dikalikan dengan faktor integrasinya. Oleh karena itu, kita cukup mencari solusi umum PD eksaknya.

Bagaimanakah Anda menentukan faktor integrasi untuk suatu PD yang bukan eksak? Masalah ini umumnya tidak mudah. Di bawah ini kita berikan beberapa ide dan petunjuk untuk menentukan faktor integrasi.

Tinjau PD yang tidak eksak $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.
Karena PD (11) eksak maka

$$\boxed{\begin{aligned}\mu M &= \mu(x,y)M(x,y)\\ \mu N &= \mu(x,y)N(x,y)\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad \text{atau}$$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \text{atau}$$

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Sekarang kita meninjau beberapa kasus berikut:

(a) Misalkan $\mu = \mu(x)$ (yaitu fungsi dari x saja). Maka

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}\,.$$

Jadi, PD (12) menjadi

$$\frac{1}{\mu}N\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Bila

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x)\,,$$

maka dari PD (13) didapat

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = g(x) \quad \text{atau} \quad \frac{d\mu}{\mu} = g(x)\,dx\,.$$

Dengan melakukan pengintegralan, didapat

$$\ln \mu = \int g(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int g(x)\,dx} .$$

Jadi, faktor integrasinya adalah

$\mu = e^{\int g(x)\,dx}$, dengan

$$g(x) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} .$$

Contoh 1.28

Kita telah mengetahui bahwa PD: $y\,dx + (x^2 y - x)\,dy = 0$ .... (14)

tidak eksak. Untuk PD ini:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1-(2xy-1)}{x^2 y - x} = \frac{2-2xy}{x^2 y - x} = \frac{2(1-xy)}{x(xy-1)} = -\frac{2}{x} = g(x) .$$

Faktor integrasi PD (14) adalah

$a \ln b = \ln b^a$
$e^{a \ln b} = e^{\ln b^a} = b^a.$

$$\mu = e^{\int g(x)\,dx} = e^{\int -(2/x)\,dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}}$$

$$= x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Ini sama dengan yang disebutkan di atas. ■

(b) Dengan argumentasi seperti di (a), Anda dapat menunjukkan (sebagai latihan) bahwa bila

$$\mu = \mu(y) \quad \text{dan} \quad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = g(y) ,$$

maka faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int g(y)dy}$.

Contoh 1.29

PD: $2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0$ .... (15)

tidak eksak (kenapa?), selanjutnya

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{2x+6x}{-2xy} = -\frac{4}{y} = g(y) .$$

Jadi, faktor integrasi PD (15) adalah

$$\mu = e^{\int g(y)\,dy} = e^{\int -\left(\frac{4}{y}\right)dy} = e^{-4\ln y} = e^{\ln y^{-4}} = y^{-4} = \frac{1}{y^4}.$$

Untuk menentukan solusi PD (15) sekarang kita meninjau PD:

$$\frac{2xy}{y^4}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0 \text{ . ...} \quad (16)$$

Untuk menentukan solusi umum PD (16), Anda mencari fungsi $f(x,y)$ sehingga $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^3}$ dan $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3x^2}{y^4}$.

Dari hubungan $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^3}$, diperoleh: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^3} + g(y)$. .... (17)

Dari hubungan $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3x^2}{y^4}$ dan (17) didapat

$$-\frac{3x^2}{y^4} + g'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \quad \text{atau} \quad g'(y) = \frac{1}{y^2} \;\Rightarrow\; g(y) = -\frac{1}{y}.$$

Jadi, solusi umum PD (16), yang juga merupakan solusi umum PD (15) adalah $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = C$. ■

(c) Misalkan $\mu = \mu(xy)$. Dengan substitusi $z = xy$, didapat

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}.\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{d\mu}{dz} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}.\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{d\mu}{dz}.$$

Dengan memasukkan ini ke (12) didapat:

$$\frac{1}{\mu}\left(yN\frac{d\mu}{dz} - xM\frac{d\mu}{dz}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

atau

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}.$$

Sekarang bila

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=h(z)\ ,$$

dengan $z = xy$ maka faktor integrasi adalah

$\mu = e^{\int h(z)\,dz}$ di mana $z = xy$.

Contoh 1.30

Tinjau PD: $y\,dx+(x+3x^3y^4)\,dy=0$ . ... (18)

PD ini tidak eksak (kenapa ?)

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=1-(1+9x^2y^4)=-9x^2y^4$$

$$yN-xM=xy+3x^3y^5-xy=3x^3y^5 .$$

Jadi, $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=\dfrac{-9x^2y^4}{3x^3y^5}=-\dfrac{3}{xy}=-\dfrac{3}{z}$. Maka faktor integrasinya adalah $\mu=e^{\int-\left(\frac{3}{z}\right)dz}=e^{-3\ln z}=\dfrac{1}{z^3}=\dfrac{1}{(xy)^3}$. ■

(d) Dengan cara yang sama seperti (c), Anda dapat menunjukkan bahwa bila

$$\mu=\mu(x^2+y^2) \quad \text{dan} \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{2(xN-yM)}=h(z)\ ,$$

di mana $z = x^2 + y^2$. Maka faktor integrasinya adalah

$\mu = e^{\int h(z)\,dz}$, dengan $z = x^2 + y^2$.

Contoh 1.31

Tinjau PD: $(y-x)\,dx-(x+y)\,dy=0$ . ... (19)

PD ini tidak eksak (kenapa ?)

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=1-(-1)=2$$

dan

$$xN - yM = -x(x+y) - y(y-x) = -(x^2+y^2)\ .$$

Jadi,

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{2(xN - yM)} = \frac{2}{-2(x^2+y^2)} = -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{z}\ ,$$

dan faktor integrasinya adalah

$$\mu = e^{\int(-1/z)\,dz} = e^{-\ln z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2}\ . \qquad \blacksquare$$

Perhatian:

Dalam praktiknya, untuk menentukan faktor integrasi, Anda harus memeriksa apakah

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x) \ \text{ atau } \ \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = g(y)$$

atau

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = h(z) = h(xy)$$

atau

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{2(xN - yM)} = h(z) = h(x^2+y^2)\ .$$

Bila salah satu berlaku, misalnya

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = h(z) = h(xy)\ ,$$

maka faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int h(z)\,dz}$, dengan $z = xy$.

Contoh 1.32

Tinjau PD: $y^2 dx + (xy + y^2 + 1)\,dy = 0$.

PD ini tidak eksak (kenapa?)

bukan fungsi dari x

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - y = y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{y}{-y^2 + y^2 + 1}, \text{ tetapi } \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{y}{-y^2} = \frac{-1}{y} = g(y) .$$

Jadi, faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int -\left(\frac{1}{y}\right) dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$.

Setelah membaca materi kegiatan belajar di atas, cobalah kerjakan latihan berikut agar pemahaman Anda lebih mantap.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan *df* dari fungsi-fungsi berikut:
   A. $f(x, y) = xy + \sin xy$
   B. $f(x, y) = x^2 y + ye^x$
   C. $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$
   D. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

2) Tentukan fungsi $f(x, y)$ sehingga
   A. $df = 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$
   B. $df = x \sin y\,dx + (\frac{1}{2} x^2 \cos y + 2)\,dy$
   C. $df = \dfrac{x}{x^2 + y^2} dx + \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} + \cos y \right) dy$

D. $df = (e^y + x^2 y)\,dx + (x e^y + \frac{1}{3}x^3 - y)\,dy$.

3) Manakah di antara PD-PD berikut eksak:

A. $3x^2 y^4 dx + (4x^3 y^3 + 2)\,dy = 0$

B. $(xy + \sin y)dx + (\frac{1}{2}x^2 + x\cos y + y)\,dy = 0$

C. $(xy^2 + \ln y)\,dx + (x^2 y + \ln x)\,dy = 0$

D. $(x^2 y^3 + \ln y)\,dx + (x^3 y^2 + \frac{x}{y})\,dy = 0$.

4) Untuk menentukan solusi PD eksak:

$(xy + \cos y)\ dx + (\frac{1}{2}x^2 - x\sin y - y)\,dy = 0$,

lengkapi langkah-langkah berikut:

(i) Solusi PD dicari dengan menentukan $f(x, y) = C$ sehingga

$\frac{\partial f}{\partial x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) Hubungan $\frac{\partial f}{\partial x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, memberikan $f(x, y) = \ldots\ldots\ldots\ldots + g(y)$

dan dari hubungan $\frac{\partial f}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, didapat $g'(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, yang

memberikan $g(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(iii) Jadi solusi umum PD tersebut adalah $f(x, y) \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = C$.

5) Tentukan solusi PD-PD berikut:

A. $3x^2 y^4 dx + 4x^3 y^3 dy = 0$

B. $(y - x^3)\,dx + (x + y^3)\,dy = 0$

C. $y\,dx + (x + \frac{2}{y})\,dy = 0$

D. $\cos x\ \cos^2 y\ dx - 2\sin x\ \sin y\ \cos y\ dy = 0$

6) Solusi PD: $(y\cos xy + 2xy)\,dx + (x\cos xy + x^2)\,dy = 0$ adalah

   A. $f(x,y) \equiv \cos xy + x^2 y = C$

   B. $f(x,y) \equiv \cos xy - x^2 y = C$

   C. $f(x,y) \equiv \sin xy + x^2 y = C$

   D. $f(x,y) \equiv \sin xy - x^2 y = C$

7) Faktor integrasi PD: $(x^2 y - y^2)\,dx - x^3 dy = 0$ adalah

   A. fungsi dari x
   B. fungsi dari y
   C. fungsi dari xy
   D. fungsi dari $(x^2 + y^2)$

8) Faktor integrasi dari PD: $y\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0$ adalah

   A. $\mu = \dfrac{1}{x^2}$

   B. $\mu = \dfrac{1}{y^2}$

   C. $\mu = \dfrac{1}{x^2 y^2}$

   D. $\mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

9) Tentukan faktor integrasi PD-PD berikut:

   A. $(2x^3 - y)\,dx + x\,dy = 0$

   B. $y\,dx + (y^3 - 2x)\,dy = 0$

   C. $y^3 dx - (x^2 + xy^2)\,dy = 0$

   D. $(y^2 - x^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$.

10) Tentukan solusi umum PD-PD berikut:

   A. $2y^4 dx - (xy^3 + 2x^3)\,dy = 0$

   B. $y\,dx + (y^3 - 2x)\,dy = 0$

Agar latihan Anda terarah dengan baik dan Anda dapat memperkirakan hasil latihan Anda, bacalah rambu-rambu jawaban dan jawaban latihan 3 ini di akhir modul ini.

Setelah mengerjakan latihan 3, simaklah rangkuman kegiatan belajar berikut ini sehingga Anda merasa siap untuk mengerjakan Tes Formatif 3.

RANGKUMAN

PD orde satu: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ adalah **eksak** apabila $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Solusi dicari dengan menentukan $f(x,y)$ sehingga $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Bila PD: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ **tidak eksak** maka fungsi $\mu = \mu(x,y)$ sehingga PD: $\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$ menjadi **eksak**, disebut **faktor integrasi**. Solusi PD eksak ini adalah juga solusi PD yang tidak eksak. Faktor integrasi μ(x,y) dapat dicari dengan memeriksa apakah:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x) \quad \text{atau} \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = g(y) \quad \text{atau}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = g(z) = g(xy) \quad \text{atau} \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2(xN - yM)} = g(z) = g(x^2 + y^2)\,.$$

Faktor integrasi μ adalah $\mu = e^{\int g(z)\,dz}$, di mana $z = x$ atau $z = y$ atau $z = xy$ atau $z = x^2 + y^2$.

Kini, setelah membaca rangkuman, tiba saatnya Anda mengerjakan Tes Formatif.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) PD yang eksak di antara PD-PD berikut adalah ....
   A. $(x^2 + \sin y)y' + (x^3 + \cos y) = 0$
   B. $(x^3 \cos y + xe^y)\, y' + 3x^2 \sin y + e^y = 0$
   C. $(y \ln x + x^3)y' + \dfrac{y}{x^2} + x^2 = 0$
   D. $\sin xyy' + \cos x + y = 0$

2) Nilai a dan b agar PD: $(x^2 y + axy^2)\, dx + (bx^3 + 2x^2 y + 2y)\, dy = 0$ eksak adalah ....
   A. $a = 2$; $b = \dfrac{1}{3}$
   B. $a = 2$; $b = \dfrac{2}{3}$
   C. $a = 1$; $b = \dfrac{1}{3}$
   D. $a = 1$; $b = \dfrac{2}{3}$

3) Solusi umum PD: $(\dfrac{1}{y} + y \cos xy)\, dx + (x \cos xy - \dfrac{x}{y^2})\, dy = 0$ adalah ....
   A. $f(x, y) \equiv \dfrac{x}{y} + \cos xy = C$
   B. $f(x, y) \equiv \dfrac{x}{y} - \cos xy = C$
   C. $f(x, y) \equiv \dfrac{x}{y} + \sin xy = C$
   D. $f(x, y) \equiv \dfrac{x}{y} - \sin xy = C$

4) PD: $(x^3y^2 - 2y^4)\,dx + (xy^3 - x^4y)\,dy = 0$ mempunyai faktor integrasi:

A. $\mu = \dfrac{1}{x^3}$

B. $\mu = \dfrac{1}{y^3}$

C. $\mu = \dfrac{1}{x^3y^3}$

D. $\mu = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^3}$

5) Solusi umum PD: $(x^2y - y^3)\,dx + (xy^2 - x^3)\,dy = 0$ adalah:

A. $f(x,y) \equiv \dfrac{x}{y}\left(1 + \dfrac{x^2}{3y^2}\right) = C$

B. $f(x,y) \equiv \dfrac{x}{y}\left(1 - \dfrac{x^2}{3y^2}\right) = C$

C. $f(x,y) \equiv \dfrac{x}{y}\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right) = C$

D. $f(x,y) \equiv \dfrac{x}{y}\left(1 - \dfrac{x^2}{y^2}\right) = C$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 4. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 4

PD Linear Orde Satu

Persamaan diferensial linear orde satu adalah PD orde satu yang berbentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = \varphi(x)\,. \quad \text{...} \quad (1)$$

Contoh 1.33

PD: $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ adalah PD linear. ■

Contoh 1.34

PD: $\frac{dy}{dx} - xy = \sin x$ adalah PD linear. ■

Contoh 1.35

PD: $y\frac{dy}{dx} + y = x^2$ **bukan** PD linear karena tidak berbentuk PD(1). ■

$\boxed{P = P(x)}$ Bila PD (1) dikalikan dengan $e^{\int P\,dx}$ maka diperoleh

$$e^{\int P\,dx}\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = \varphi(x)\, e^{\int P\,dx}\,. \quad \text{................................} \quad (2)$$

Sekarang perhatikan bahwa

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P\,dx} y\right) = e^{\int P\,dx}\ \frac{dy}{dx} + yP\, e^{\int P\,dx} = e^{\int P\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right). \quad \text{...........} \quad (3)$$

Dari (2) dan (3) didapat:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P\,dx} y\right) = \varphi(x)\ e^{\int P\,dx}$$

dan dengan mengintegralkannya diperoleh:

$$e^{\int P\,dx} y = \int\left(\varphi(x)\ e^{\int P\,dx}\right) dx + C$$

atau

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int\left(\varphi(x)e^{\int P\,dx}\right)dx + C\right].$$

Jadi solusi umum PD (1) adalah:

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int\left(\varphi(x)e^{\int P\,dx}\right)\ dx + C\right].$$

Contoh 1.36

Selesaikan PD: $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 3x$.

Penyelesaian:

Di sini $P(x) = \dfrac{1}{x}$ dan $\varphi(x) = 3x$ sehingga

$\int P\,dx = \int \dfrac{1}{x}dx = \ln x$ dan $e^{\int P\,dx} = e^{\ln x} = x$; $e^{-\int P\,dx} = \dfrac{1}{x}$.

Jadi solusi umum PD adalah

$$y = \frac{1}{x}\left\{\int (3x)\,x\,dx + C\right\} = \frac{1}{x}\left(\int 3x^2 dx + C\right) = \frac{1}{x}(x^3 + C) = x^2 + \frac{C}{x}. \qquad \blacksquare$$

Contoh 1.37

Tentukan solusi umum PD: $xy' + y + 4 = 0$.

Penyelesaian:

PD ini ditulis dalam bentuk (1) menjadi $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{4}{x}$.

Di sini $P(x) = \dfrac{1}{x}$ dan $\varphi(x) = -\dfrac{4}{x}$. Seperti di Contoh 1.36 diperoleh

$\int P\,dx = \int \dfrac{1}{x}dx = \ln x$ atau $e^{\int P\,dx} = x$ dan $e^{-\int P\,dx} = \dfrac{1}{x}$.

Jadi solusi umum PD di atas adalah

$$y = \frac{1}{x}\left[\int\left(-\frac{4}{x}\right)x dx + C\right] = \frac{1}{x}\left[\int(-4)dx + C\right] = \frac{1}{x}[-4x + C]$$

$$= -4 + \frac{C}{x}. \qquad \blacksquare$$

Contoh 1.38
Selesaikan PD: $y' + y \tan x = \sin 2x$ dengan syarat awal $y(0) = 1$.

Penyelesaian:
Di sini $P(x) = \tan x$ dan $\varphi(x) = \sin 2x$.

sehingga $\int P dx = \int \tan x \, dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \ln(\sec x)$,

$$e^{\int P dx} = e^{\ln(\sec x)} = \sec x \quad \text{dan} \quad e^{-\int P dx} = \frac{1}{\sec x} = \cos x .$$

Jadi solusi umum PD di atas adalah

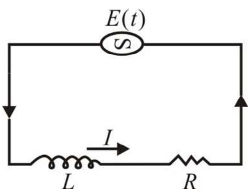
$$y = \cos x \left\{ \int (\sin 2x)(\sec x) \, dx + C \right\} = \cos x \left(2 \int \sin x \; dx + C \right)$$

$$= (\cos x)(-2\cos x + C) = -2\cos^2 x + C \cos x .$$

Syarat awal $y(0) = 1$ memberikan $1 = -2 + C \Rightarrow C = 3$.
Jadi solusi PD yang memenuhi $y(0) = 1$ adalah

$$y = -2 \cos^2 x + 3 \cos x . \qquad \blacksquare$$

Contoh 1.39
(*Aplikasi*). Berdasarkan hukum Kirchoff, arus listrik dalam rangkaian LR (Gambar 1.2) memenuhi PD linear berikut:



Gambar 1.2

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t) \quad \text{atau}$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E(t)}{L},$$

di mana I = arus, R = tahanan, L = induktan dan $E(t)$ adalah voltase.

Di sini $P(t) = \frac{R}{L}$ dan $\varphi(t) = \frac{E(t)}{L}$ sehingga $\int P dt = \int \frac{R}{L} dt = \frac{R}{L} t$.

Jadi solusi umumnya adalah

$$I(t) = e^{(-R/L)t}\left(\int \frac{E(t)}{L} e^{(R/L)t} dt + C\right).$$

Bila $E(t) = E_0 =$ konstanta maka

$$I(t) = e^{(-R/L)t}\left(\frac{E_0}{L}\int e^{(R/L)t} dt + C\right)$$

$$= e^{(-R/L)t}\left(\frac{E_0}{L}.\frac{L}{R} e^{(R/L)t} + C\right) = \frac{E_0}{R} + C\, e^{(-R/L)t}. \qquad \blacksquare$$

Persamaan Diferensial Bernoulli

PD berbentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \varphi(x)y^{\alpha} \quad , \quad \alpha \ \ real, \ \alpha \neq 0 \text{ dan } \alpha \neq 1 \quad ...... \qquad (4)$$

disebut PD **Bernoulli**.

Dengan substitusi $y^{1-\alpha} = z$, PD (4) berubah menjadi PD linear.

Contoh 1.40

Tinjau PD: $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$. .... (5)

Penyelesaian:

Ambil substitusi $y^{-1} = z$ atau $y = \frac{1}{z}$. Maka $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1}{z^2}\right)\frac{dz}{dx}$,

sehingga dari (5) didapat $-\left(\frac{1}{z^2}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{1}{zx} = -x\left(\frac{1}{z}\right)^2$. Kalikan dengan $(-z^2)$, menghasilkan PD

$$\frac{dz}{dx} - \left(\frac{z}{x}\right) = x. \quad .... \quad (6)$$

PD (6) ini mempunyai $P(x) = -\frac{1}{x}$ dan $\varphi(x) = x$.

Jadi, $\int P(x)\,dx = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln x$; $e^{\int P\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ dan $e^{-\int P\,dx} = x$.

Dan solusi umum PD (6) adalah

$$z = x\left(\int x.\frac{1}{x}\,dx + C\right) = x(x+C) = x^2 + Cx\,.$$

Jadi solusi umum PD (5) adalah $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + Cx}$. ■

Setelah membaca materi kegiatan belajar di atas, cobalah kerjakan latihan berikut agar pemahaman Anda lebih mantap.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Manakah di antara PD-PD berikut linear
   A. $x\frac{dy}{dx} + y\sin x = x^2 + 1$
   B. $\frac{dy}{dx} + y^2 = \cos\,x$
   C. $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + xy = x^2$
   D. $xy\frac{dy}{dx} + (x^2+1)y = x+1$.

2) Manakah di antara PD-PD berikut PD Bernoulli
   A. $y' + y = xy^2$
   B. $yy' + y^3 = y^4x^2$
   C. $y' = x^3y^2 + xy$
   D. $3y' + y = (1-2x)y^4$.

3) Bila $\varphi(x) = 0$ maka PD linear berubah menjadi
   A. PD tidak eksak
   C. PD homogen
   B. PD variabel terpisah
   D. Bukan PD orde satu.

4) Solusi PD: $y' + y = 2$ adalah
   A. $y = 1 + Ce^{x}$
   B. $y = 1 + Ce^{-x}$
   C. $y = 2 + Ce^{x}$
   D. $y = 2 + Ce^{-x}$.

5) Solusi PD: $y' - y = 3e^{x}$ adalah
   A. $y = (3 + Cx)e^{3x}$
   B. $y = (3 + Cx)e^{-3x}$
   C. $y = (3x + C)e^{x}$
   D. $y = (3x + C)e^{-x}$.

6) Diketahui PD: $(1 + x^2)\ dy + 2xy\ dx = \cot\ x\ \ dx$. Bila PD ini ditulis dalam bentuk $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = \varphi(x)$ maka
   A. $P(x) = ...$ dan $\varphi(x) = ...$
   B. $\int P(x)\,dx = ...;$ $e^{\int P\,dx} = ...$; dan $e^{-\int P\,dx} = ...$
   C. Solusi PD menjadi y = ….

7) Tentukan solusi umum PD-PD berikut:
   A. $y' + y\ \cot\ x = 2x\ \csc x$
   B. $y' + y = 2x\,e^{-x} + x$
   C. $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.

8) PD Bernoulli $3y' + y = xy^4$ dengan substitusi

(i) $z =$ .... akan berubah menjadi PD:

(ii) $\frac{dz}{dx} + ... = ...$

9) Solusi PD: $y' = x^3y^2 + 2xy$ adalah

A. $y^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + Ce^{-x^2}$

B. $y^{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + Ce^{-x^2}$

C. $y^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + Ce^{-x^2}$

D. $y^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + Ce^{-x^2}$.

10) Tentukan solusi PD-PD berikut:

A. $y' + y = y^2$

B. $3y' + y = xy^4$

C. $xy^2y' + y^3 = \frac{\cos x}{x}$.

Agar latihan Anda terarah dengan baik dan Anda dapat memperkirakan hasil latihan Anda, bacalah rambu-rambu jawaban dan jawaban latihan 4 ini di akhir modul ini.

Setelah mengerjakan latihan 4, simaklah rangkuman kegiatan belajar berikut ini sehingga Anda merasa siap untuk mengerjakan Tes Formatif 4.

RANGKUMAN

PD linear $\frac{dy}{dx} + P(x)y = \varphi(x)$, mempunyai solusi

$$y = e^{-\int Pdx}\left\{\int (\varphi e^{\int Pdx})dx + C\right\}.$$

PD Bernoulli: $y' + P(x)y = \varphi(x)y^{\alpha}$, dapat diubah menjadi PD linear dengan menggunakan substitusi $y^{1-\alpha} = z$.

Kini, setelah membaca rangkuman, tiba saatnya Anda mengerjakan Tes Formatif.

TES FORMATIF 4

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) PD orde satu linear di antara PD-PD berikut adalah ....
   A. $xy' + (x^2 + 1)y = y^4$
   B. $y' + y^3 \sin x = x$
   C. $x^2 y' + y \sin x = e^x$
   D. $xy^2 y' + (\sin x + 1) = \cos x$.

2) PD Bernoulli di antara PD-PD berikut adalah ....
   A. $(2x + y)y' = 4x + 5$
   B. $y' + 3y = 4x^2$
   C. $xyy' + 5x^2 + 4 = 0$
   D. $xy' + y \cos x = e^x y^3$

3) PD Bernoulli: $xy' + y = x^3 y^3$ dengan menggunakan substitusi $z = y^{-2}$ berubah menjadi PD linear ….
   A. $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{2}{x} z = -2x^2$
   B. $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{2}{x} z = 2x^2$
   C. $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x} z = 2x^2$
   D. $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x} z = -2x^2$.

4) Solusi PD: $x^2 y' + 2xy = \cos x$ yang memenuhi $y(\pi/2) = 8/\pi^2$ adalah ....
   A. $y = \frac{1}{x^2}(\cos x + 2)$
   B. $y = \frac{1}{x^2}(-\cos x + 2)$
   C. $y = \frac{1}{x^2}(\sin x + 1)$
   D. $y = \frac{1}{x^2}(-\sin x + 3)$.

5) Solusi umum PD: $xy' + y = (2x^4 + x^3)y^3$ adalah ....
   A. $y^{-2} = -2x^4 + 2x^3 + Cx^2$
   B. $y^{-2} = -2x^4 - 2x^3 + Cx^2$
   C. $y^{-2} = 2x^4 + 2x^3 + Cx^2$
   D. $y^{-2} = 2x^4 - 2x^3 + Cx^2$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 4, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Latihan

Latihan 1

1) (lihat Contoh 1.1)
   A. tidak B. ya C. ya D. tidak.

2) (lihat Contoh 1.1)
   A. eksplisit B. implisit C. implisit D. eksplisit.

3) (i) $y' = -C \sin x$

   (ii) $$\begin{cases} -C \sin x + C \cos x . \tan x = 0 \\ -C \sin x + C \cos x . \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0 \\ -C \sin x + C \sin x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

   (iii) $y = C \cos x$ adalah solusi umum dari PD: $y' + y \tan x = 0$.

4) C (gunakan sistematika penyelesaian pada soal nomor 3).

5) (i) $1 + Cx^2 y' + 2Cxy = 0$ (iii) $C = \dfrac{-1}{x^2 y' + 2xy}$

   (ii) $$\begin{cases} x + Cx^2 y + C^2 = 0 \\ 1 + Cx^2 y' + 2Cxy = 0 \end{cases}$$ (iv) $x - \dfrac{x^2 y'}{x^2 y' + 2xy} + (\dfrac{-1}{x^2 y' + 2xy})^2 = 0$

   atau $x(x^2 y' + 2xy)^2 - x^2 y'(x^2 y' + 2xy) + 1 = 0$.

6) C (gunakan sistematika penyelesaian pada soal nomor 5).

7) A (idem soal nomor 6).

8) B (idem soal nomor 7).

9) (i) $y(0) = 2e^0 = (2)(1) = 2$ (iv) $2e^x = 2e^x$ (memenuhi)

(ii) (memenuhi)

(iii) $y' = 2e^x$ .... (***)

(v) $y = 2e^x$ adalah solusi khusus PD: $y' = 2e^x$.

10) D (gunakan sistematika penyelesaian pada soal nomor 9)

Latihan 2

1) A. tidak

B. ya; $y^2 y' + \dfrac{x}{x^2+1} = 0$;

C. tidak

D. ya; $\dfrac{\sin y + y}{y} y' + \dfrac{x^2+1}{x} = 0$.

2) A. ya B. tidak C. tidak D. ya.

3) (i) $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x \ln x}$

(ii) $\ln y = \ln\ (\ln x) + C$.

4) B.

5) C.

6) (i) $\dfrac{dx}{dt} = -\,k\,x$

(ii) $x = C\,e^{-kt}$, (konstanta integrasi diambil $\ln C$)

(iii) $x = x_0\, e^{-kt}$

(iv) $\dfrac{x_0}{2} = x_0\, e^{-kT}$

(v). $T = \dfrac{1}{k} \ln 2$.

7) B.

8) (i). $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\ (y/x) = g(y/x)$, di mana $g(u) = u + \tan\ u$

(ii). $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{\tan\ z} = \dfrac{\cos z}{\sin z}\ dz$

(iii). $\ln x = \ln\ (\sin z) + \ln C \quad \Rightarrow \quad x = C \sin z$

(iv). $x = C \sin(y/x)$.

9) D.

10) A.

Latihan 3

1) A. $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = (y + y\ \cos\ xy)\ dx + (x + x\ \cos\ xy)\ dy$

B. $df = (2xy + ye^x)\,dx + (x^2 + e^x)\,dy$

C. $df = 2xe^{x^2+y^2}dx + 2ye^{x^2+y^2}dy$

D. $df = \dfrac{y(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}dx + \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}dy$.

2) A. $f(x,y) = x^2 y + \dfrac{1}{3}y^3$

B. $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 \sin y + 2y$

C. $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \sin y$

D. $f(x,y) = xe^y + \dfrac{1}{3}x^3 y - \dfrac{1}{2}y^2$.

3) A. ya B. ya C. tidak D. ya.

4) (i). $\dfrac{\partial f}{\partial x} = xy + \cos y$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}x^2 - x\sin y - y$

(ii). $\dfrac{\partial f}{\partial x} = xy + \cos y \;\Rightarrow\quad f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 y + x\cos y + g(y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}x^2 - x\sin y - y = \dfrac{1}{2}x^2 - x\sin y + g'(y)$ dan $g'(y) = -y$;

$g(y) = -\dfrac{1}{2}y^2$.

(iii). $f(x,y) \equiv \dfrac{1}{2}x^2 y + x\cos y - \dfrac{1}{2}y^2 = C$.

5) A. $f(x,y) \equiv x^3 y^4 = C$

B. $f(x,y) \equiv xy - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{4}y^4 = C$

C. $f(x,y) \equiv xy + 2\ln y = C$

D. $f(x,y) \equiv \sin x \cos^2 y = C$.

6) C

7) C

8) B

9) A. $\mu = \dfrac{1}{x^2}$

B. $\mu = \dfrac{1}{y^3}$

C. $\mu = \dfrac{1}{x^2 y^2}$

D. $\mu = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^2}$

10) A. $f(x,y) \equiv -\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = C$

B. $f(x,y) \equiv \dfrac{x}{y^2} + y = C$.

Latihan 4

1) A. ya B. tidak C. ya D. tidak.

2) A. ya B. tidak C. ya D. ya.

3) B.

4) D.

5) C

6) A. $P(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $\varphi(x) = \dfrac{\cot\ x}{1+x^2}$

B. $\int P(x)dx = \ln(1+x^2)$; $e^{\int Pdx} = 1+x^2$ dan $e^{-\int P\,dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

C. $y = \dfrac{1}{1+x^2}(\ln(\sin x) + C\ )$.

7) A. $y = \dfrac{1}{\sin x}(x^2 + C)$

B. $y = x^2 e^{-x} + x - 1 + Ce^{-x}$

C. $y = e^{-x}[\operatorname{arc}\tan\ (e^x) + C]$.

8) (i) $z = y^{-3}$ (ii) $\dfrac{dz}{dx} - z = -x$.

9) D

10) A. $\dfrac{1}{y} = 1 + Ce^x$

B. $y^{-3} = x + 1 + Ce^x$

C. $y^3 = \dfrac{1}{x^3}(3x\sin x + 3\cos x + C)$.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1	*Tes Formatif 2*	*Tes Formatif 3*	*Tes Formatif 4*
1) B	1) B	1) B	1) C
2) C	2) C	2) A	2) D
3) A	3) A	3) C	3) A
4) B	4) C	4) C	4) C
5) A	5) C	5) B	5) B

Daftar Pustaka

Boyce, W.E. & R.C. DiPrima (1992). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 5^{th} ed. New York: John Wiley & Sons.

Kreyszig, E. (1993). *Advanced Engineering Mathematics*. 7^{th} ed. New York: John Wiley & Sons.

Simmons, G.F. (1979). *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. McGraw-Hill Publishing Company, Ltd.