Pemetaan Konformal

- Pemetaan Konformal adalah suatu pemetaan yang menjaga ukuran maupun pengertian sudut.
- Pemetaan Konformal digunakan dalam membahas diagram tempat kedudukan akar (root locus) dan kriteria kestabilan Nyquist.
- Hubungan fungsional: $z=F(s)$ dapat diinterpretasikan sebagai pemetaan titik-titik pada bidang s ke titik-titik pada bidang z / bidang F(s).
- Untuk setiap titik P pada bidang s terdapat suatu titik P' pasangannya pada bidang F(s). P' adalah bayangan dari P.
- Untuk membuktikan bahwa pemetaan yang dinyatakan dengan suatu fungsi analitik $z=F(s)$ adalah konformal, tinjau suatu kurva halus $s=s(\zeta)$, yang melalui suatu titik ordiner.

- Jika kita tulis z_o=F(s_o), maka:

$$z - z_o = \frac{F(s) - F(s_o)}{s - s_o}(s - s_o)$$

- Dengan demikian,

$$\angle z - z_o = \angle \frac{F(s) - F(s_o)}{s - s_o} + \angle s - s_o$$

$\angle s - s_o$ adalah sudut antara sumbu nyata positif dan vektor dari s_o ke s.

- Jika s mendekati s_o sepanjang kurva halus s(ζ), maka $\angle s - s_o$ adalah sudut θ_1 antara sumbu nyata positif dan garis singgung kurva tersebut pada s_o.
- Dengan cara sama, jika z mendekati z_o, maka $\angle z - z_o$ mendekati sudut ϕ_1 yang merupakan sudut antara sumbu nyata positif dan garis singgung dari F(s) pada z_0. Dengan demikian diperoleh

$$\phi_1 - \theta_1 = \angle F'(s_o)$$

- Dengan kurva halus yang lain $s=s_2(\zeta)$, yang melalui titik so, kita dapat melakukan analisis serupa sehingga diperoleh

$$\phi_2 - \theta_2 = \angle F'(s_o)$$

- Oleh karena itu

$$\phi_1 - \theta_1 = \phi_2 - \theta_2$$

atau

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$$

- Jadi ukuran dan pengertian sudut pada pemetaan tetap dijaga.
- Pemetaan yang dinyatakan dengan suatu fungsi analitik $z=F(s)$ adalah konformal di setiap titik yang menyebabkan $F(s)$ reguler dan $F'(s) \neq 0$.

Definisi Transformasi Laplace

- Transformasi Laplace dari f(t) didefinisikan sebagai

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

dengan:

f(t) = fungsi waktu t, dengan f(t)=0 untuk t<0

s = variabel kompleks

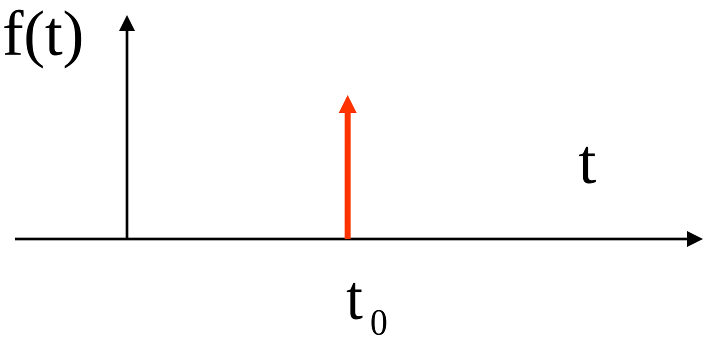
Contoh fungsi Dirac

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$\delta(t)$

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$$

$\delta(t - t_0)$

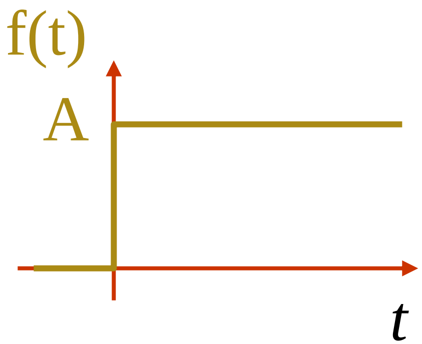


$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-st}dt = e^{-st_0}$$

Contoh

- Transformasi Laplace dari fungsi tangga berikut:

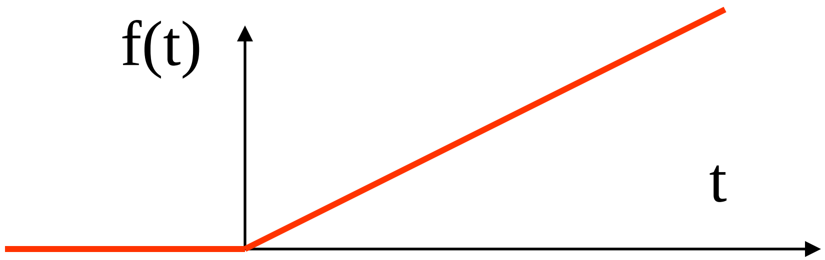
$$f(t) = 0 \qquad \text{untuk } t < 0$$
$$= A \qquad \text{untuk } t > 0$$



Jawab:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} Ae^{-st}dt = A\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

- Transformasi Laplace dari fungsi Ramp

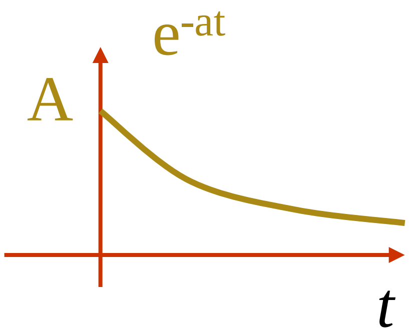


$$f(t) = at \quad \text{untuk} \quad t > 0$$

$$\boxed{L[r(t)] = \int_0^\infty ate^{-st}dt = \left[\frac{-ate^{-st}}{s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-a}{s}e^{-st}dt = \frac{a}{s^2}}$$

- Transformasi Laplace dari fungsi eksponensial berikut:

$$f(t) = 0 \qquad \text{untuk } t < 0$$
$$\quad = Ae^{-at} \qquad \text{untuk } t > 0$$



Jawab:

$$\mathbf{L}\{Ae^{-at}\} = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt$$

$$= A\left[\frac{-e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{A}{(s+a)}$$

- Transformasi Laplace dari fungsi sinusoida berikut:

  f(t) = 0 untuk t < 0

  = A sinωt untuk t > 0

Jawab:

$$\mathbf{L}\{A \sin \omega t\} = \int_0^\infty A \sin \omega t \, e^{-st} dt$$

$e^{j\omega t}$ = cos ωt + j sin ωt

e^{-jwt} = cos ωt - j sin ωt

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = \frac{A}{2j}\int_0^\infty (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})e^{-st} dt$$

$$= \frac{A}{2j}\frac{1}{s - j\omega} - \frac{A}{2j}\frac{1}{s + j\omega} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

f(t)	*F(s)*
Step function, u(t)	1/s
e^{-at}	$1/(s+a)$
te^{-at}	$1/(s+a)^2$
$\sin(\omega t)$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
t^n	$n!/s^{n+1}$
$\dfrac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$

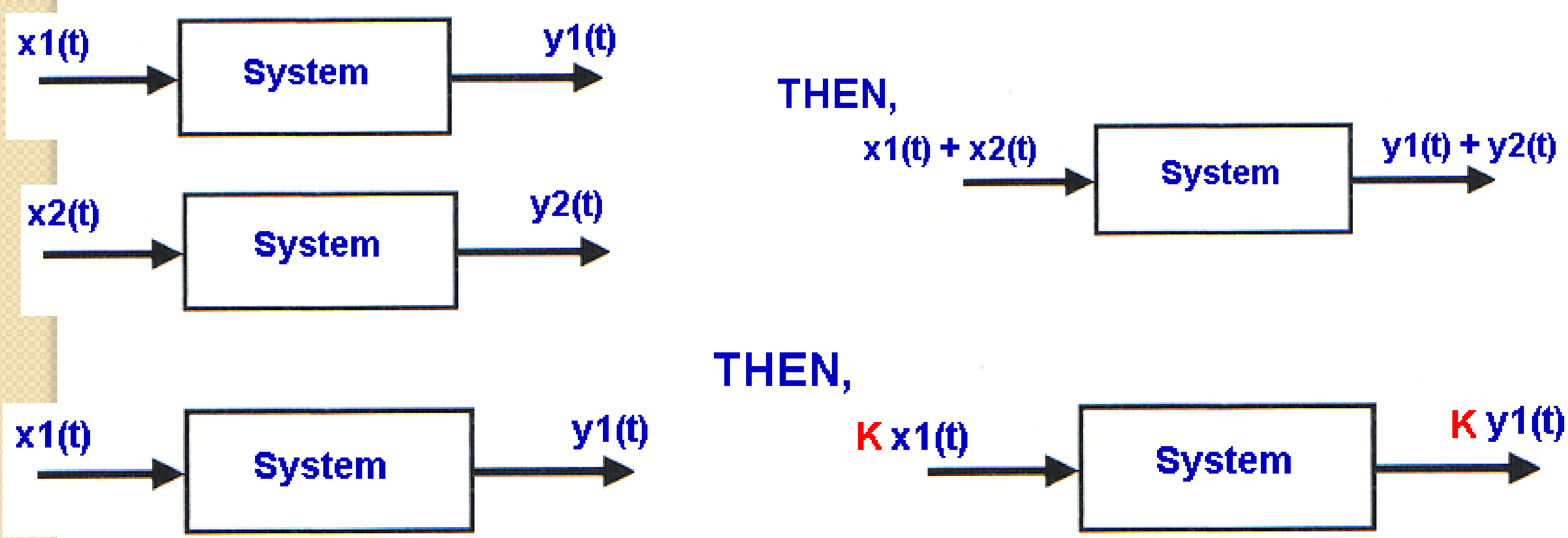
f(t)	F(s)=L[f(t)]	
$\delta(t)$	1	
$u(t)$	$1/s$	
t	$1/s^2$	
t^n	$n!/s^{(n+1)}$	
e^{at}	$1/(s-a)$	
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	
$sh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	
$ch(at)$	$s/(s^2-a^2)$	
$e^{bt}\sin(at)$	$a/[(s-b)^2+a^2]$	
$e^{bt}\cos(at)$	$(s-b)/[(s-b)^2+a^2]$	
$(e^{bt}-e^{at})/(b-a)$	$1/(s-a)(s-b)$	$a \neq b$
$(be^{bt}-ae^{at})/(b-a)$	$s/(s-a)(s-b)$	$a \neq b$

SIFAT LINIERITAS

$$F_1(s) = L[f_1(t)] \qquad c_1, c_2 = \text{Constants}$$

$$F_2(s) = L[f_2(t)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} & L[c_1.f_1(t) + c_2.f_2(t)] = \\ & c_1.L[f_1(t)] + c_2.L[f_2(t)] = \\ & c_1.F_1(s) + c_2.F_2(s) \end{aligned}}$$



SIFAT TRANSLASI

a) Jika $F(s)=L[f(t)]$

$$\boxed{L[e^{at}f(t)] = F(s-a)}$$

$$L[e^{at}f(t)] = \int_0^\infty [e^{at}f(t)]e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$$

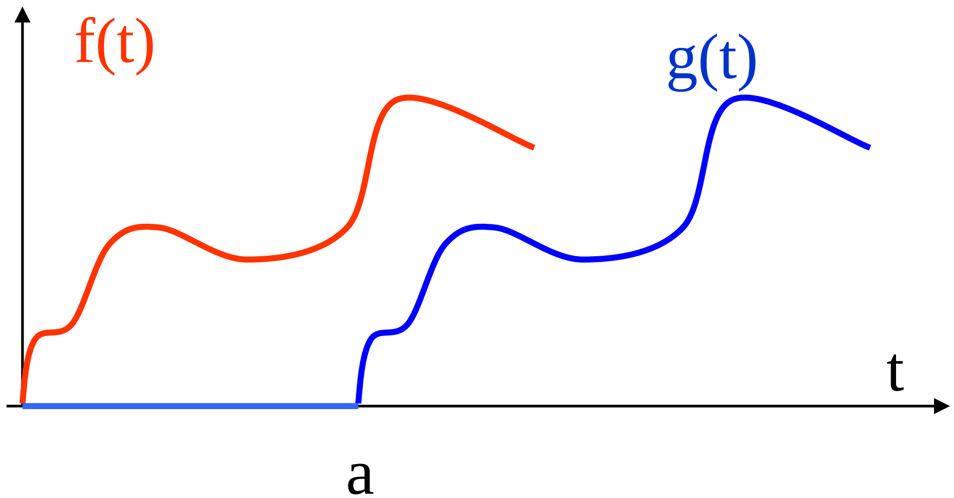
Contoh

$$\boxed{L[Cos(2t)] = \frac{s}{s^2+4}}$$

$$\boxed{L[e^{-t}Cos(2t)] = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}}$$

- Translasi [time]

b) Jika $g(t) = f(t-a)$ for $t>a$
$= 0$ for $t<a$



$$\boxed{L[g(t)] = e^{-as}F(s)}$$

$$L[g(t)] = \int_0^\infty f(t-a)]e^{-st}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}du = e^{-as}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du$$

Contoh

$$L[t^3] = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$g(t) = (t-2)^3, t > 2$$
$$g(t) = 0, t < 2$$

$$L[g(t)] = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

- Perubahan skala waktu

$$\boxed{L[f(a.t)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)}$$

$$L[f(a.t)] = \int_0^\infty f(a.t)]e^{-st}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-\frac{su}{a}}\frac{du}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Contoh

$$L[Sin(t)] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L[Sin(3t)] = \frac{1}{3}\frac{1}{\left[\frac{s}{3}\right]^2+1} = \frac{3}{s_2+9}$$