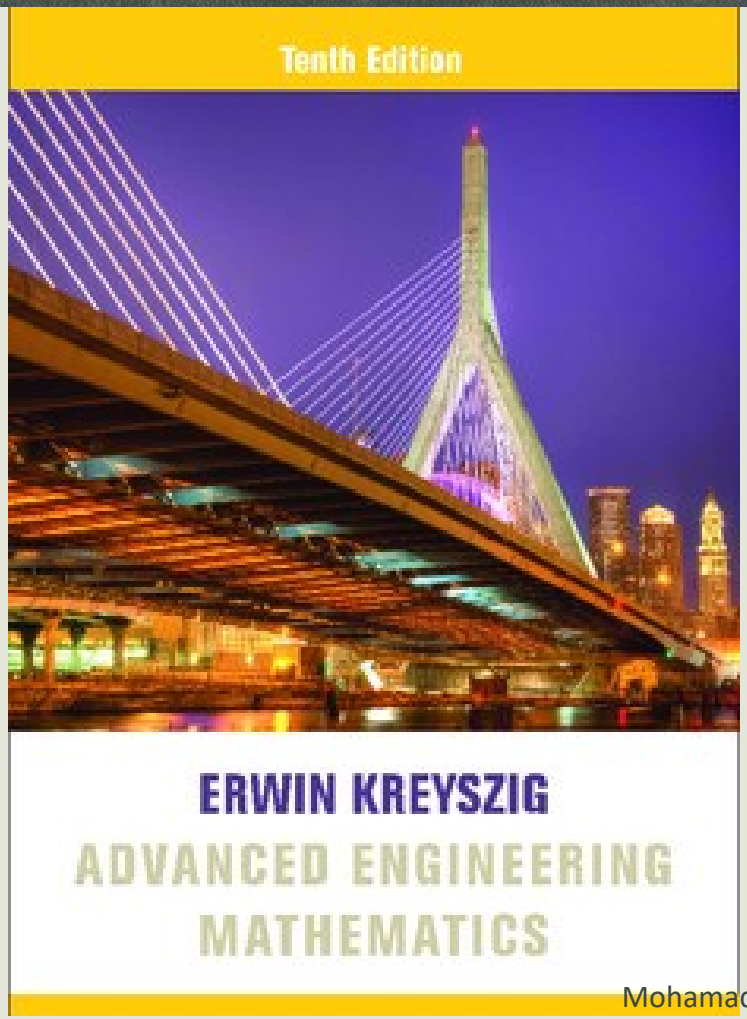
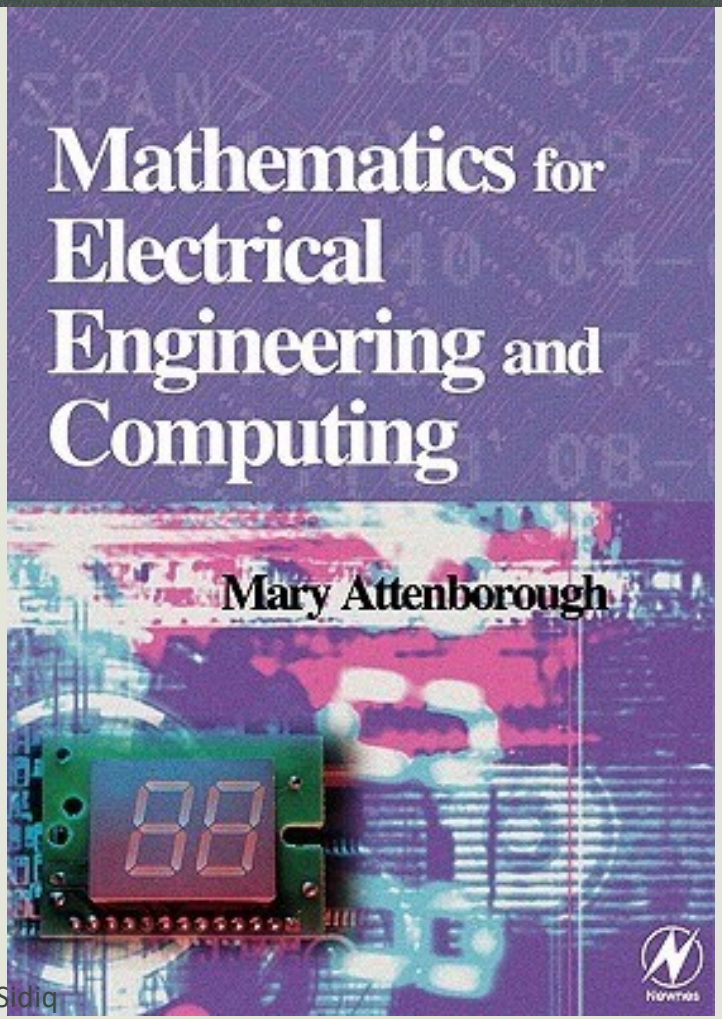
MATEMATIKA TEKNIK 2

S1-TEKNIK ELEKTRO

Mohamad Sidiq

REFERENSI E-BOOK





REFERENSI ONLINE

- SOS Mathematics
  - http://www.sosmath.com/diffeq/diffeq.html
- Wolfram Research – Math World
  - http://mathworld.wolfram.com/OrdinaryDifferentialEquation.html
- Math Forum @ Drexel
  - http://mathforum.org/differential/differential.html
- Internet Differential Equations Activities
  - http://www.sci.wsu.edu/idea/
- Paul's Online Math Notes
  - http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/SystemsDE.aspx

MATH CALCULATOR ONLINE

- Symbolab
  - https://www.symbolab.com
- OnSolver.com
  - https://onsolver.com
- Math10.com
  - https://www.math10.com
- Brilliant
  - https://brilliant.org/

MODELING CALCULATOR

- **The Ordinary Differential Equations Project**
  - http://faculty.sfasu.edu/judsontw/ode/html/odeproject.html
- **ODEs on the Web**
  - http://math.arizona.edu/~dsl/webodes.htm
- **IDEA Project**
  - http://www.sci.wsu.edu/idea/current.html

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

Mohamad Sidiq

PENGERTIAN

- Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui.
- Jika persamaan diferensial memiliki satu peubah tak bebas maka disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB).
- Sedangkan jika peubah bebasnya lebih dari satu dinamakan Persamaan Diferensial Parsial.
- Persamaan diferensial biasa dikatakan linear, apabila persamaan diferensial tersebut mempunyai peubah tak bebas maupun turunannya bersifat linear.
- Bentuk umum PDBL orde-n adalah sebagai berikut $a_n(x)\ yn + a_{n-1}(x)\ y_{n-1} + \ldots + a_0(x)\ y = f(x)$ dengan $an(x) \neq 0$ dan $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, … , $a_0(x)$ adalah koefisien PD.
- Bila $f(x) = 0$ disebut PDBL Homogen, sebaliknya jika tidak disebut PDBL tak homogen.
- Orde PDB adalah turunan tertinggi yang terlibat dalam PDB.

CONTOH

- $dN = kN$, $N = N(t)$, orde 1 di mana N peubah tak bebas, t peubah bebasnya.
- $y' + 2\cos 2x = 0$, orde 1 di mana y peubah tak bebas x peubah bebasnya.
- $y'' + e^x y' + \sin xy = e^x \sin x$, PD orde 2.
- $x^3 y'' + \cos 2x\,(y')^3 = x^2 y^2$, PD orde 2.

SOLUSI PD

- Persamaan diferensial di mana *y* sebagai peubah tak bebas yang bergantung pada peubah bebas x atau suatu fungsi y = f(x) disebut solusi PDB jika fungsi y = f(x) disubtitusikan ke PDB diperoleh persamaan identitas.
- Solusi umum dan solusi khusus

  Jika fungsi y = f(x) memuat konstanta sembarang maka solusi disebut **solusi umum**, sebaliknya disebut **solusi khusus**.

CONTOH

- $\boldsymbol{y = \cos x + c}$ $\rightarrow$ **solusi umum**
  Persamaan Diferensial $y' + \sin x = 0$ Karena
  $(\cos x + c)' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$
- $\boldsymbol{y = \cos x + 6}$ $\rightarrow$ **solusi khusus**
  Persamaan Diferensial $y' + \sin x = 0$ Karena
  $(\cos x + 6)' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE 1

- PDB terpisah
- PDB dengan koefisien fungsi homogen
- PDB Linier

PDB TERPISAH

- PDB yang dapat dituliskan dalam bentuk :

  $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ disebut <u>PDB terpisah.</u>

  Penyelesaian : integralkan kedua ruas

- *Contoh:*

  Tentukan solusi umum PD

  - $(x \ln x)\, y' = y \Rightarrow y' = dy/dx$
  - $y' = x^3 e^{-y} \Rightarrow y(2) = 0$

PENYELESAIAN

- $(x \ln x)y' = y$

$$x \ln x \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\ln y = \ln(\ln x) + \ln c$$

$$\ln y = \ln(c \ln x)$$

$$y = c \ln x$$

Jadi solusi umum PD tersebut adalah

$$y = c \ln x$$

PENYELESAIAN

- $y' = x^3 e^{-y}$

$$\frac{dy}{y} = x^3 e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = x^3 dx$$

$$\int e^y dy = \int x^3 dx$$

$$e^y = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$y = \ln(\frac{1}{4}x^4 + c)$$

Diketahui y(2)=0, sehingga:

$$0 = \ln\left(\frac{1}{4}2^4\right) + c$$

$$1 = 4 + c \rightarrow c = -3$$

Jadi solusi khusus PD tersebut adalah:

$$y = \ln(\frac{1}{4}x^4 - 3)$$

LATIHAN SOAL

Tentukan solusi Persamaan diferensial dibawah ini

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$
4. $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$
5. $y' = (1 + 2y)(1 + x^2 + 2x^3)$
6. $y' = 2(1 + x)(1 + y^2), y(0) = 0$
7. $y' = \frac{y \cos x}{1+2y^2}, y(0) = 1$
8. $(1 + e^x)y' +, e^x y = 0, y(0) = 1$

FUNGSI HOMOGEN

- Fungsi A(x,y) disebut fungsi homogen dengan derajat n, jika A(kx,ky) = k^nA(x,y), k konstanta sembarang
- Contoh :

  Periksa apakah fungsi berikut homogen atau tidak!

  1. A(x,y) = $x + y$

     A(kx,ky) = kx + ky

     = k ($x + y$) = k A(x,y)

     A(x,y) = $x + y$, fungsi homogen dengan derajat 1

  2. A(x,y) = $x^2 + xy$

     A(kx,ky) = $k^2x^2 + kx\,ky$

     = k^2 (x^2+xy) = k^2 A(x,y)

     A(x,y) = $x^2 + xy$, fungsi homogen dengan derajat 2

PD DENGAN KOEFISIEN FUNGSI HOMOGEN

- Persamaan Diferensial Biasa yang dapat dituliskan dalam bentuk $y' = \frac{A(x,x)}{B(x,y)}$ dengan A,B fungsi homogen dengan derajat yang sama disebut PDB dengan koefisien fungsi homogen.
- Penyelesaian:

  Menggunakan subtitusi y = ux, u = u(x)

  $y' = u'x + u$

  $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$

  $dy = x\,du + u\,dx$

CONTOH

Selesaikan solusi persamaan diferensial berikut:

1. $y' = \frac{x+y}{x}$

   Penyelesaian:

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

   Misalkan $y = ux$, maka $dy = x\,du + u\,dx$

   $$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} \leftrightarrow \frac{x\,du + u\,dx}{dx} = 1 + u \leftrightarrow x\,du + u\,dx = (1+u)\,dx$$

   $$\leftrightarrow x\,du = dx \leftrightarrow du = \frac{dx}{x} \leftrightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \leftrightarrow \mathrm{u} = \ln x + c$$

   $$\leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln x + c \leftrightarrow y = x \ln x + cx$$

   Jadi solusi umum dari PD di atas adalah $y = x \ln x + cx$

CONTOH

2. $y^2 \frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy = 0, y(1) = 1$

Penyelesaian:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\frac{y}{x})^2 + 2(\frac{y}{x})$. Misalkan $y = ux$, maka $dy = x\,du + u\,dx$, sehingga: $\frac{x\,du + u\,dx}{dx} = u^2 + 2u \leftrightarrow x\,du + u\,dx = (u^2 + 2u)\,dx \leftrightarrow$

$x\,du = (u^2+u)dx \leftrightarrow \frac{du}{(u^2+u)} = \frac{dx}{x} \leftrightarrow \int \frac{du}{(u^2+u)} = \int \frac{dx}{x} \leftrightarrow$

$\int \frac{du}{u(u+1)} = \ln x + c \leftrightarrow \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})\,du = \ln cx \leftrightarrow \ln u - \ln(u+1) = \ln cx$

$\leftrightarrow \ln\left(\frac{u}{u+1}\right) = \ln cx \leftrightarrow \ln\left(\frac{y/x}{y/x+1}\right) = \ln cx \leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{y+x}\right) = \ln cx \leftrightarrow$

$\frac{y}{y+x} = \ln cx \leftrightarrow y(1 - cx) = cx^2 \leftrightarrow y = \frac{cx^2}{1-cx} \rightarrow y(1) = 1 \leftrightarrow c = \frac{1}{2}$

Jadi solusi umum dari PD di atas adalah $y = \frac{x^2}{2-x}$

LATIHAN SOAL

Tentukan solusi Persamaan diferensial dibawah ini

1. $2y\,dx - x\,dy = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2y^2}{2xy}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-3x}{2x-y}$

PDB LINIER

- PDB Linier adalah PDB yang dapat dituliskan dalam bentuk :

$$y' + p(x)\, y \;= q(x)$$

- Penyelesaian :
  - Kalikan kedua ruas dengan faktor integral $e^{\int p(x)dx}$
  - Sehingga diperoleh:

$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x)\, y e^{\int p(x)dx} = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(y e^{\int p(x)dx}\right)' = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

  - Integralkan kedua ruas:

$$y e^{\int p(x)dx} = \int y e^{\int p(x)dx} + c \Rightarrow \text{Solusi Umum PDB}$$

CONTOH

Selesaikan persamaan diferensial berikut

1. $xy' - 2y = x^3 e^x$

   Penyelesaian:

   $xy' - 2y = x^3 e^x \leftrightarrow y' - 2\frac{y}{x} = x^2 e^x \leftrightarrow p(x) = -\frac{2}{x}$ dan $q(x) = x^2 e^x$

   Faktor integrasi: $e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = x^{-2}$

   Kedua ruas dikalikan dengan x^{-2}, sehingga didapatkan:

   $\frac{1}{x^2} y' - \frac{2}{x^3} y = e^x \leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} y\right)' = e^x \leftrightarrow \frac{1}{x^2} y = e^x + c \leftrightarrow y = x^2 e^x + cx^2$

   Jadi solusi umumnya adalah $y = x^2 e^x + cx^2$

CONTOH

2. $y' + y = (x+1)^2,\ y(0) = 3$

Penyelesaian:

$y' + y = (x+1)^2 \leftrightarrow p(x) = 1$ dan $q(x) = (x+1)^2$

Faktor integrasi: $e^{\int 1dx} = e^x$

Kedua ruas dikalikan dengan e^x, sehingga didapatkan:

$e^x y' + e^x y = e^x(x+1)^2 \leftrightarrow (e^x y)' = e^x(x+1)^2 \leftrightarrow$

$\int (e^x y)' = \int e^x(x+1)^2 \leftrightarrow \int d(e^x y) = \int e^x(x+1)^2\, dx \leftrightarrow$

$e^x y = e^x(x+1)^2 - \int 2(x+1)e^x dx \leftrightarrow$

$e^x y = e^x(x+1)^2 - 2(x+1)e^x + 2e^x + c \leftrightarrow$

$y = (x+1)^2 - 2(x+1) + 2 + ce^{-x} \leftrightarrow y = x^2 + 1 + ce^{-x}$

Diketahui $y(0) = 3$, sehingga $3 = 1 + c \leftrightarrow \mathrm{c} = 2$

Jadi solusi khusus adalah $y = x^2 + 1 + 2e^{-x}$

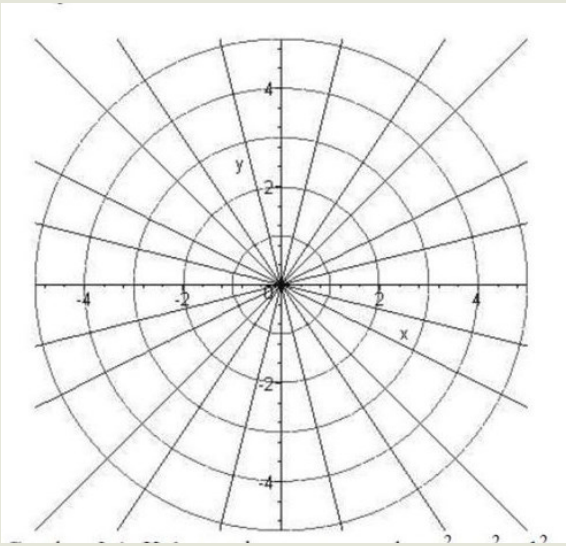
LATIHAN SOAL

Selesaikan persamaan diferensial di bawah ini:

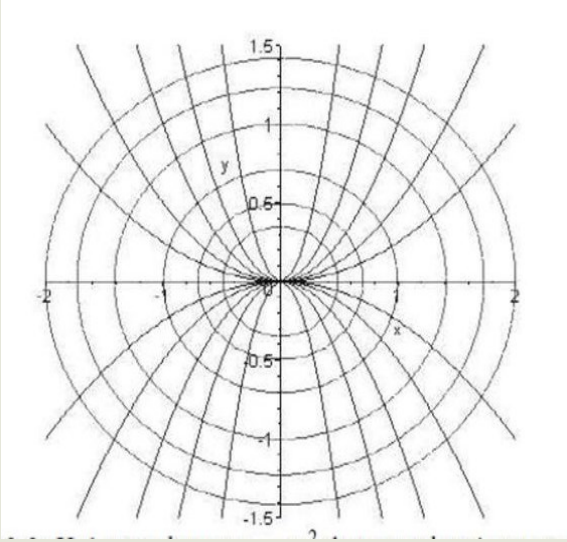
1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + 2y = e^{-x}$
3. $(x+1)y' + y = x^2 - 1$
4. $y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$
5. $xy' + (1+x)y = e^{-x}, y(1) = 0$
6. $y' + y\tan x = \sec x$
7. $\sin x\, y' + 2y\cos x = \sin 2x, y(\frac{\pi}{2})=2$

Trayektori Ortogonal

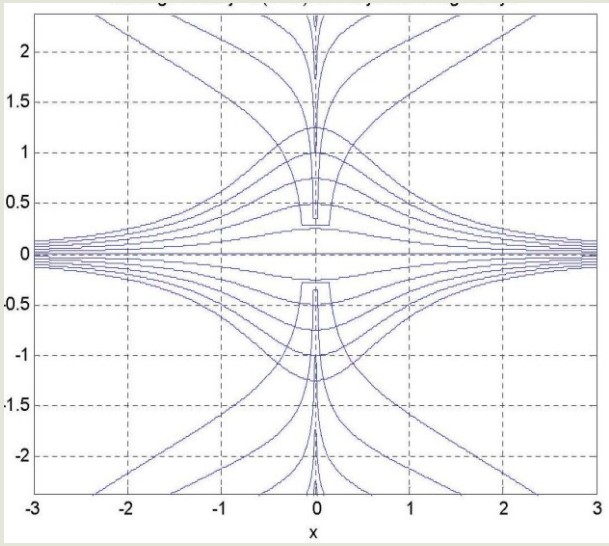
Jika diketahui keluarga kurva pada bidang XY yang dinyatakan oleh persamaan *F(x, y, k)= 0* dengan *k* konstanta variabel. Kurva yang memotong tegak lurus kurva-kurva tersebut dinamakan trayektori ortogonal dari kurva *F*.



Keluarga Kurva $y = mx$ dan $y^2 + x^2 = k^2$



Keluarga Kurva $y = kx^2$



Keluarga Kurva $y = k/(1+x^2)$

Menentukan Trayektori Ortogonal

Tahapan menentukan Trayektori Ortogonal keluarga kurva $F(x, y, k) = 0$

1. Turunkan persamaan garis/kurva, sehingga didapatkan persamaan diferensial orde-1 untuk keluarga kurva, yaitu $F'(x, y, k) = 0$
2. Substitusikan $k = F(x, y)$ pada $F'(x, y, k) = 0$ untuk memperoleh persamaan diferensial implisit bagi $F(x, y) = 0$ berbentuk $y' = (x,y)$
3. Buat persamaan diferensial yang berkaitan untuk keluarga ortogonal menjadi bentuk berikut: $y' = -1/f(x,y)$
4. Selesaikan persamaan diferensial baru. Penyelesaiannya adalah keluarga trayektori ortogonal.

CONTOH

Tentukan keluarga trayektori ortogonal dari keluarga *kurva* $y=kx^2$.

Penyelesaian:

- Persamaan diferensial untuk $y = kx^2$ adalah $\frac{dy}{dx} = 2kx$ (a)
- Subsitusikan $k = \frac{y}{x^2}$ pada persamaan (a) sehingga didapatkan persamaan diferensial implisit berikut: $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x^2}x = \frac{2y}{x}$
- Persamaan diferensial untuk keluarga ortogonal yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} = -\frac{1}{2y/_x} = -\frac{x}{2y}$$

- Selesaikan persamaan diferensial baru:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \leftrightarrow 2ydy = -xdx \leftrightarrow \int 2ydy = \int -xdx \leftrightarrow y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

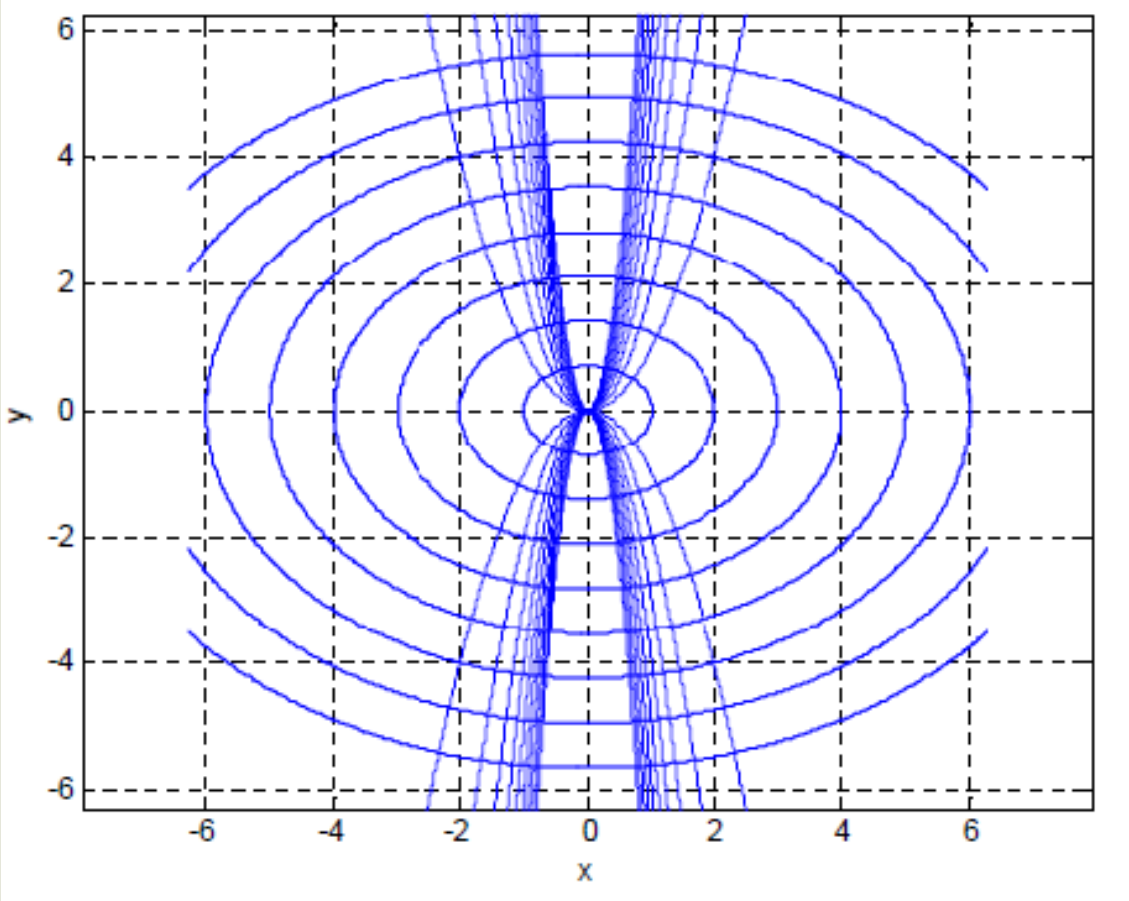
CONTOH

$\leftrightarrow 2y^2 + x^2 = 2c$

$\leftrightarrow 2y^2 + x^2 = k$

Jadi, persamaan trayektori ortogonal untuk keluarga kurva $y = kx^2$ adalah:

$2y^2 + x^2 = k$



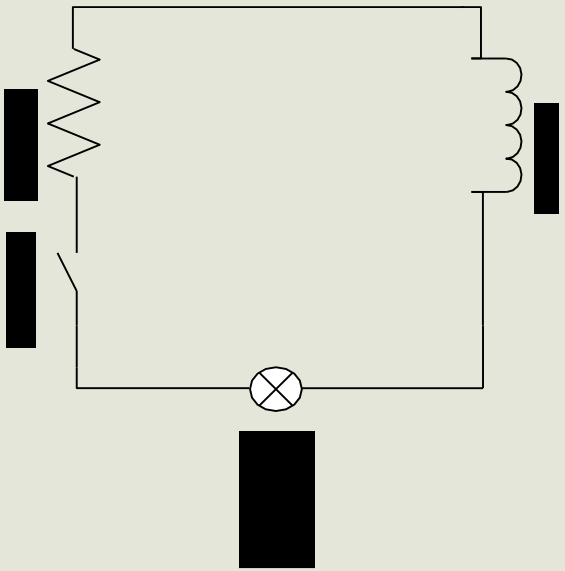
LATIHAN SOAL

Tentukan solusi trayektori ortogonal dari keluarga kurva

1. $x^2 + y^2 = k^2$
2. $x^2 - y^2 = k^2$
3. $y = cx$
4. $y = \sqrt{x + k}$
5. $4x^2 + y = k$

PENERAPAN PD ORDE 1 PADA RANGKAIAN LISTRIK

Hukum Kirchhoff, rangkaian listrik sederhana (gambar samping) yang mengandung sebuah tahanan sebesar *R* ohm dan sebuah kumparan sebesar *L* Henry dalam rangkaian seri dengan sumber gaya elektromotif (sebuah baterai atau generator) yang menyediakan suatu voltase *E(t)* volt pada saat t memenuhi



$$L\,I'(t) + R\,I(t) = E(t)$$

Dengan *I* adalah arus listrik dalam ampere.

CONTOH

1. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan *R* = 6 ohm, *L* = 2 henry dan sebuah baterai yang menyediakan voltase sebesar *E = 12* Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol (*I* = 0 pada saat *t* = 0, jika saklar *S* ditutup).

   Penyelesaian:

   Persamaan diferensialnya adalah: $2I' + 6I = 12$

   Atau bisa disederhanakan menjadi: $I' + 3I = 6$

CONTOH

Kemudian kedua ruas kalikan dengan faktor integrasi e^{3t} sehingga diperoleh

$$I = e^{-3t}\left(2e^{3t} + C\right) = 2 + C\,e^{-3t}$$

Syarat awal, $I = 0$ pada saat $t = 0$, memberikan $C = -2$ Sehingga,

$$I = 2 - 2e^{-3t}$$

CONTOH

2. Dari contoh sebelumnya baterai diganti dengan generator arus bolak – balik dengan $E = 12 \sin 9t$ Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol (I = 0 pada saat t = 0, jika saklar S ditutup).

Penyelesaian:

Persamaan diferensialnya adalah

$$2I' + 6I = 12\sin 9t$$

Atau bisa disederhanakan menjadi

$$I' + 3I = 6\sin 9t$$

Kemudian kedua ruas kalikan dengan faktor integrasi e^{3t}
Sehingga dipereroleh:

$$I = e^{-3t}\int 6\, e^{3t} \sin 9t\, dt$$

CONTOH

Dengan integral parsial, didapat hasil integralnya adalah

$$I = e^{-3t}\left(\frac{6e^{3t}}{9+81}(3\sin 9t - 9\,cost\,9t)\right) + C$$

Jadi, $I = \frac{1}{5}\sin 9t\ - \frac{3}{5}cost\,9t + Ce^{-3t}$

Syarat awal, *I=0* pada saat *t=0,* didapatkan:

$$0 = -\frac{3}{5} + C \leftrightarrow C = \frac{3}{5}$$

Sehingga, $I = \frac{1}{5}\sin 9t\ - \frac{3}{5}cost\,9t + \frac{3}{5}e^{-3t}$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan $R = 10^6$ ohm, $L = 1$ henry dan sebuah sumber gaya elektromotif yang menyediakan voltase sebesar $E = 1$ Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol ($I = 0$ pada saat $t = 0$, jika saklar S ditutup).

2. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan $L = 3{,}5$ Henry dan sebuah sumber gaya elektromotif yang menyediakan voltase sebesar $E(t) = 120 \sin 377t$ Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol ($I = 0$ pada saat $t = 0$, jika saklar S ditutup).

LATIHAN SOAL

3. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan R = 1000 ohm dan sebuah sumber gaya elektromotif yang menyediakan voltase sebesar $E(t) = 120 \sin 377\, t$ Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol (I = 0 pada saat t = 0, jika saklar S ditutup).

4. Tentukan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RL dengan R = 1000 ohm, L = 3,5 henry dan sebuah sumber gaya elektromotif yang menyediakan voltase sebesar $E(t) = 120 \sin 377t$ Volt dan diasumsikan saat awal arusnya adalah nol (I = 0 pada saat t = 0, jika saklar S ditutup).