TE 091467 Teknik Numerik Sistem Linear

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

Trihastuti Agustinah

Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan
Jurusan Teknik Elektro - FTI
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

OUTLINE

1. OBJEKTIF
2. TEORI
3. CONTOH
4. SIMPULAN
5. LATIHAN

Tujuan Pembelajaran

Mahasiswa mampu:

1. Mendekomposisi matriks menggunakan metode singular value decomposition (SVD)

2. Menghitung invers menggunakan SVD

Pendahuluan

Dekomposisi matriks singular dapat dilakukan dengan menggunakan metode Singular Value Decomposition (SVD).

Singular Value Decomposition (SVD)

Dekomposisi matriks $A \in R^{m \times n}$

- ✓ dua matriks ortonormal U dan V
- ✓ matriks quasidiagonal S

$$\boxed{A = USV^T}$$

dengan $U \in R^{m \times m}$

$V \in R^{n \times n}$

$S = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho)$

Bentuk matriks S

S adalah elemen diagonal berupa nilai singular A

- tidak negatif dengan urutan menurun
- $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_\rho$ dengan $\rho = \min(m, n)$

Matriks *S* memiliki bentuk

❶ $\boldsymbol{m < n}$ $\quad \left[diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_\rho) \middle| 0_{m\times(n-m)} \right]$

❷ $\boldsymbol{m = n}$ $\quad [diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_\rho)]$

❸ $\boldsymbol{m > n}$ $\quad \begin{bmatrix} diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_\rho) \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$

Prosedur dekomposisi (1)

Diberikan matriks A ($m \times n$)

Langkah 1. Definisikan matriks B

- Jika $m \le n$ → $B = AA^T$
- Jika $m > n$ → $B = A^TA$

B adalah matriks bujursangkar dimensi m atau n (*ukuran yang lebih kecil antara baris dan kolom*)

Langkah 2. Dapatkan eigenvalue B melalui pers. karakteristik

$$|\lambda I - B| = 0$$

Prosedur dekomposisi (2)

Langkah 3. Dapatkan nilai singular A (akar kuadrat positif eigenvalue matriks B)

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Langkah 4. Bentuk matriks S dengan cara

- ❑ Jika $m < n$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Prosedur dekomposisi (3)

Langkah 4. (lanjutan)

- Jika $m > n$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Jika $m = n$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix}$$

Prosedur dekomposisi (4)

Langkah 5. Dapatkan matriks U dan V

- Kolom matriks U dibentuk dari eigenvektor normalisasi dari C

$$C = AA^T$$

- Kolom matriks V dibentuk dari eigenvektor normalisasi dari matriks D

$$D = A^TA$$

Invers matriks melalui SVD

Review: sifat matriks ortonormal *U* dan *V*

$$U^{-1} = U^T \quad \text{dan} \quad V^{-1} = V^T$$

Invers matriks *A* (*m*=*n*)

$$A^{-1} = (V^T)^{-1} S^{-1} U^{-1}$$

$$= V\,(\mathrm{diag}(1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_\rho))\, U^T$$

Contoh 1 (1)

Matriks *A* dan inversnya menggunakan SVD

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Dapatkan:

a) SVD dari matriks *A*

b) Invers matriks *A* menggunakan SVD

Contoh 1 (2)

Langkah 1. Karena ukuran matriks *A* adalah 2×2 (*m*=*n*), maka

$$B = AA^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Eigenvalue *B*

$$|\lambda I - B| = \det \begin{bmatrix} \lambda - 32 & 0 \\ 0 & \lambda - 18 \end{bmatrix} = (\lambda - 32)(\lambda - 18) = 0$$

$$\lambda_1 = 32 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = 18$$

Contoh 1 (3)

Langkah 3. Nilai singular *A*: $\sigma_1 = \sqrt{32}$ dan $\sigma_2 = \sqrt{18}$

Langkah 4. Bentuk matriks *S*: $S = \begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}$

Langkah 5. Matriks *U* dan *V*

Matriks *U*: dibentuk dari eigenvektor normalisasi matriks $C=B$

Contoh 1 (4)

Langkah 5. Sistem homogen:

$$(\lambda I - B)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda - 32 & 0 \\ 0 & \lambda - 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor normalisasi untuk matriks U

- **λ=32** $\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- **λ=18** $\quad \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 1 (5)

Matriks *V*: dibentuk dari eigenvektor normalisasi matriks *D*

$$D = A^T A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks *D*

$$|\lambda I - D| = \det \begin{bmatrix} \lambda - 25 & -7 \\ -7 & \lambda - 25 \end{bmatrix} = (\lambda - 32)(\lambda - 18) = 0$$

Eigenvalue matriks *D*

$$\lambda_1 = 32 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = 18$$

Contoh 1 (6)

Sistem homogen: $$(\lambda I - B)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda - 25 & -7 \\ -7 & \lambda - 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor normalisasi untuk matriks *V*

- **λ=32** $$\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
- **λ=18** $$\begin{bmatrix} -7 & -7 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matriks *V*: $$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Contoh 1 (7)

SVD dari matriks A:

$$A = USV^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh 1 (8)

Invers matriks A

$$A^{-1} = V\,(diag(1/\sigma_1,\cdots,1/\sigma_\rho))\,U^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{32} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/8 & -1/6 \\ 1/8 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 (1)

Dapatkan SVD untuk matriks 2×3 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dapatkan juga invers matriks A melalui SVD

Contoh 2 (2)

Langkah 1. Matriks $B = AA^T$ → ukuran matriks A adalah $m < n$

$$B = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Eigenvalue matriks B

$$|\lambda I - B| = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

Nilai eigen: $\lambda=2$ dan $\lambda=1$

Contoh 2 (3)

Langkah 3. Nilai singular *A*: $\sigma_1 = \sqrt{2}$ dan $\sigma_2 = 1$

Langkah 4. Matriks *S*: $S = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Langkah 5. Matriks *U* dan *V* dibentuk dari eigenvektor normalisasi matriks *C* (*karena m<n, maka C=B*) dan *D*

$$(\lambda I - B)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda=2$ $\quad \mathbf{u}_1 = [1 \quad 0]^T$
- $\lambda=1$ $\quad \mathbf{u}_2 = [0 \quad 1]^T$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 (4)

Matriks $D = A^T A$

$$D = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pers. karakteristik matriks D

$$|\lambda I - D| = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

Eigenvalue matriks D: $\lambda = 2, 1, 0$

Contoh 2 (5)

Sistem homogen:

$$(\lambda I - D)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hitung eigenvektor normalisasi untuk matriks *V*:

- **λ=2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Contoh 2 (6)

- **λ= 1**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **λ=0**

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matriks *V*:

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Contoh 2 (7)

SVD dari matriks A:

$$A = USV^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 (8)

Invers matriks A:

$$A^{-1} = V\,(diag(1/\sigma_1, \cdots, 1/\sigma_\rho))\,U^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Singular Value Decomposition

1) SVD mendekomposisi matriks ke dalam perkalian dua matriks ortonormal dan satu matriks quasidiagonal

2) Bentuk matriks quasidiagonal bergantung pada ukuran baris dan kolom dari matriks yang akan didekomposisi

3) Invers matriks dapat dihitung menggunakan metode SVD

Soal Latihan

Dapatkan invers matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

TERIMA KASIH