2.2.5 Matriks Singular Value Decomposition

SVD merupakan teorema aljabar linear yang disebut mampu untuk memecah blok suatu matriks A menjadi tiga matriks baru yaitu sebuah matriks *orthogonal* U, matriks diagonal S, dan *transpose* matriks *orthogonal* V. Teorema SVD adalah sebagai berikut :

$$Amn = Umm \times Smn \times V^{T}nn$$

Dimana U^TU= matriks identitas (I), V^TV = matriks identitas (I). Kolom matriks U merupakan eigenvektor *orthonormal* dari AA^T. Sedangkan kolom matriks V merupakan *eigenvektor orthonormal* dari A^TA. dan S merupakan matriks diagonal akar dari nilai eigen dari matriks U atau V dalam urutan dari yang terbesar.

Untuk lebih memudahkan dalam pemahaman matriks SVD berikut adalah contoh sebuah matriks ordo kecil A yang akan digunakan untuk menghitung nilai SVD. Berikut adalah contoh perhitungannya.

1. Diketahui sebuah matriks A dengan ordo 2 x 3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Menghitung nilai matriks U yang diawali dengan menghitung nilai AA^T.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

…. **Persamaan (2.2)**

Selanjutnya setelah didapatkan matriks AA^T dilanjutkan menghitung nilai *eigen* dan vektor *eigen* dari AA^T . rumus yang digunakan untuk menghitung vector *eigen* adalah $Av = \lambda v$ yang diimplementasikan dalam AA^T sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Kemudian pisahkan tiap set rumus tersebut menjadi sebuah persamaan sebagai berikut :

$$11x_1 + x_2 = \lambda x_1$$

$$x_1 + 11x_2 = \lambda x_2$$

………. **Persamaan (2.3)**

Dan untuk mempermudah dalam perhitungan maka dirubah dalam bentuk sebagai berikut :

$$(11 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 + (11 - \lambda)x_2 = 0$$

Ditentukan nilai λ dengan menghitung nilai determinan dari rumus diatas terhadap nilai nol.

$$\begin{vmatrix} (11-\lambda) & 1 \\ 1 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Dan hasilnya adalah sebagai berikut :

$$(11-\lambda)(11-\lambda) - 1 \cdot 1 = 0$$
$$(\lambda - 10)(\lambda - 12) = 0$$
$$\lambda = 10, \lambda = 12$$

Nilai *eigen* terlah diperoleh yaitu λ=10 dan λ=12. Selanjutnya mengganti nilai λ pada rumus perhitungan sebenlumnya untuk memperoleh vector *eigen*. Untuk λ=10 diperoleh hasil sebagai berikut :

$$(11-10)x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = -x_2$$

Sehingga diperoleh vector *eigen* [1, -1]. Kemudian untuk λ=12 diperoleh hasil sebagai berikut :

$$(11-12)x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2$$

Dan diperoleh vector *eigen* [1,1]. Vector eigen tersebut menjadi kolom vector pada matriks diurut berdasarkan nilai *eigen*. Dengan kata lain vector *eigen* dari nilai *eigen* yang terbesar menjadi kolom pertama sedangkan kolom berikutnya ditempati oleh vector *eigen* yang memiliki nilai eigen yang lebih kecil.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks tersebut dikonversi kedalam bentuk matriks *orthogonal* dengan menggunakan normalisasi *gramschmidt* terhadap kolom vector. Perhitungannya adalah sebagai berikut:

$$\vec{u_1} = \frac{\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|} = \frac{[1,1]}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{[1,1]}{\sqrt{2}} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$\vec{w_2} = \vec{v_2} - \vec{u_1} \cdot \vec{v_2} * \vec{u_1} =$$

$$[1,-1] - [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \cdot [1,-1] * [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] =$$

…… **persamaan (2.4)**

$$[1,-1] - 0 * [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] = [1,-1] - [0,0] = [1,-1]$$

$$\vec{u_2} = \frac{\vec{w_2}}{|\vec{w_2}|} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}]$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

3. Menghitung nilai matriks V. cara untuk mendapaktan nilainya sama seperti perhitungan untuk memperoleh matriks U dari A^TA

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

… Persamaan (2.5)

Rumus nilai *eigen* adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$10x_1 + 2x_3 = \lambda x_1$$

$$10x_2 + 4x_3 = \lambda x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \lambda x_2$$

$$(10 - \lambda)x_1 + 2x_3 = 0$$

$$(10 - \lambda)x_2 + 4x_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + (2 - \lambda)x_3 = 0$$

Perhitungan determinan terhadap nol adalah sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} (10-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & (10-\lambda) & 4 \\ 2 & 4 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(10 - \lambda)[(10 - \lambda)(2 - \lambda) - 16] + 2[0 - (20 - 2\lambda)] =$$

$$\lambda(\lambda - 10)(\lambda - 12) = 0,$$

Jadi nilai *eigen* yang diperoleh adalah λ= 0, λ=10, dan λ=12. Kemudian ganti nilai pada rumus sebelumnya untuk menentukan vector *eigen*.

Untuk λ=12

$$(10 - 12)x_1 + 2x_3 = -2x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 = 1, x_3 = 1$$

$$(10 - 12)x_2 + 4x_3 = -2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_2 = 2x_3$$

$$x_2 = 2$$

Diperoleh V1 = [1,2,1]

Untuk λ = 10

$$(10-10)x_1 + 2x_3 = 2x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1 = -2x_2$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

Diperoleh V2 = [2,-1,0]

Untuk λ=0 :

$$10x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_3 = -5$$

$$10x_1 - 20 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$2x_1 + 8 - 10 = 0$$

$$x_1 = 1$$

Diperoleh V3 = [1,2,-5]. Kemudian urutan V1, V2, V3 sebagai vector kolom pada sebuah matriks sesuai nilai eigen terbesar adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Normalisasi matriks tersebut adalah sebagai berikut :

$$\vec{u_1} = \frac{\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|} = [\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}]$$
$$\vec{w_2} = \vec{v_2} - \vec{u_1} \cdot \vec{v_2} * \vec{u_1} = [2, -1, 0]$$
$$\vec{u_2} = \frac{\vec{w_2}}{|\vec{w_2}|} = [\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0]$$
$$\vec{w_3} = \vec{v_3} - \vec{u_1} \cdot \vec{v_3} * \vec{u_1} - \vec{u_2} \cdot \vec{v_3} * \vec{u_2} = [\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{10}{3}]$$
$$\vec{u_3} = \frac{\vec{w_3}}{|\vec{w_3}|} = [\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}]$$

Matriks V nya adalah :

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Dan setelah dilakukan transform maka matriks V^T adalah :

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

4. Menghitung matriks S berordo *m x n* dari akar nilai *eigen* bukan nol dan posisikan tiap nilai tersebut membentuk matriks *diagonal*. Nilai *eigen* terbesar akan ditempatkan dibaris matriks S yang lebih kecil. Jadi akar nilai *eigen* terbesar akan ditempatkan dibaris pertama matriks S kemudian diikuti dengan akar nilai *eigen* terbesar berikutnya.

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan rumus SVD akan diperoleh kembali nilai yang sama ataupun hampir sama dengan matriks A jika dilakukanperhitungan dengan rumus tersebut.

$$A_{mn} = U_{mm}S_{mn}V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$